Jarosław Górnicki

MATEMATYKA ZAAWANSOWANA

Celem kursu jest zapoznanie z podstawową terminologią i elementarnymi rozumowaniami leżącymi na styku analizy, algebry, teorii miary oraz topologii.

Rzeszów, luty 2023

Zbiory w przestrzeniach metrycznych

Niech $X \neq \emptyset$ będzie zbiorem o elementach $x, y, z, \ldots$, które nazywamy punktami. Istotne w tym momencie jest to, że od zbioru X nie wymagamy, by był wyposażony w jakąkolwiek strukturę. Funkcję $d: X \times X \to [0, \infty)$ spełniającą dla dowolnych $x, y, z \in X$ warunki:

1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$,
2) $d(x,y) = d(y,x)$,
3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$,

nazywamy metryką, a liczbę $d(x,y)$ odległością punktów x, y w metryce d. Strukturę (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Przykład Wyżej opisane warunki, to nic innego jak uogólnienie sposobu mierzenia odległości w przestrzeniach $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ przy pomocy linijki z podziałką. Wzorami opisujemy to tak:
- w przestrzeni $\mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$;
- w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, $d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$;
- w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, $d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$.

Korzystamy tutaj z geometrii euklidesowej, szczególnie z twierdzenia Pitagorasa. Z tego powodu przestrzenie $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, z wyżej określonymi metrykami, nazywamy przestrzeniami euklidesowymi.

Uwaga Niemal całą analizę matematyczną z jej rachunkiem różniczkowym, całkowym stworzyliśmy w przestrzeniach euklidesowych $\mathbb{R}^n$. Nie wiemy, jak może wyglądać matematyka, gdy w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$ zaczniemy posługiwać się innymi metrykami.

Nie oznacza to, że nie korzystamy z innych metryk. Na przykład, w transporcie miejskim wykorzystujemy metrykę "taksówkową": $d_T(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$.
W każdym zbiorze $X \neq \emptyset$ możemy wprowadzić wiele metryk. Wybór metryki jest naszą decyzją i zależy od naszych potrzeb.

Przykład. Niech X będzie zbiorem wszystkich funkcji ciągłych $f: [0,1] \to \mathbb{R}$. Zbiór ten oznaczamy jako $C[0,1]$. Odległość między funkcjami ze zbioru $C[0,1]$ możemy opisać na wiele sposobów, np.

$$d_{max}(f,g) = \max\{ |f(t)-g(t)| : t \in [0,1] \},$$

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t)-g(t)|\, dt.$$

Żaden z tych sposobów nie jest ani lepszy, ani gorszy od drugiego. Zadając w zbiorze różne metryki tworzymy różne światy, które mogą mieć różne własności. Przestrzeń $(C[0,1], d_{max})$ jest zupełna, a przestrzeń $(C[0,1], d)$ nie jest zupełna.
Pokażemy, że funkcja $d(f,g) = \int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt$ jest metryką w zbiorze $C[0,1]$. W tym celu musimy sprawdzić czy funkcja d spełnia warunki metryki.
Niech $f,g,h \in C[0,1]$. Z własności całki wynika nierówność

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt \geq 0, \text{ bo } |f(t)-g(t)| \geq 0.$$

Ponadto, $d(f,f) = \int_0^1 |f(t)-f(t)|\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$. Jeśli $f \neq g$, to z ciągłości funkcji f i g wynika, że $|f(t)-g(t)| > \varepsilon > 0$ dla pewnego $\varepsilon > 0$ i każdego elementu t, należącego do pewnego niezdegenerowanego przedziału $[a,b] \subset [0,1]$. Wtedy

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt \geq \int_a^b |f(t)-g(t)|\,dt \geq \varepsilon\cdot(b-a) > 0.$$

Spełniony jest więc warunek 1) metryki. Własności całki oraz nierówności (równości):

$$|f(t)-g(t)| = |g(t)-f(t)|,$$

$$|f(t)-g(t)| = |f(t)-h(t)+h(t)-g(t)| \leq |f(t)-h(t)| + |h(t)-g(t)|,$$

gwarantują spełnienie warunków 2) i 3) metryki.
Sprawdzenie, że funkcja d_{max} jest metryką jest łatwe.
Przestrzeń $(C[0,1], d_{max})$ jest przestrzenią zupełną.
Istotnie, jeśli $\{f_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego, to

$$\max\{|f_n(t)-f_m(t)| : t\in[0,1]\} \to 0, \text{ gdy } n,m \to \infty.$$

Tym bardziej dla każdego ustalonego $t \in [0,1]$ ciąg liczbowy $\{f_n(t)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

i ma granicę $f^*(t)$. Przestrzeń euklidesowa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ jest zupełna! Funkcja $f^*: [0,1] \to \mathbb{R}$ jest więc jednoznacznie określona i $\max\{|f^*(t)-f_n(t)| : t\in[0,1]\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Pokażemy, że $f^* \in C[0,1]$.

Niech $\varepsilon > 0$ będzie ustalone. Ponieważ ciąg $\{f_n(t)\}$ jest ciągiem Cauchy'ego, więc istnieje taki indeks N, że dla wszystkich $n > N$, $|f^*(t) - f_N(t)| \le \frac{\varepsilon}{3}$. Ze względu na ciągłość funkcji f_N można dobrać $\delta > 0$ takie, że jeśli $|t-t'| < \delta$, to $|f_N(t) - f_N(t')| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Wtedy

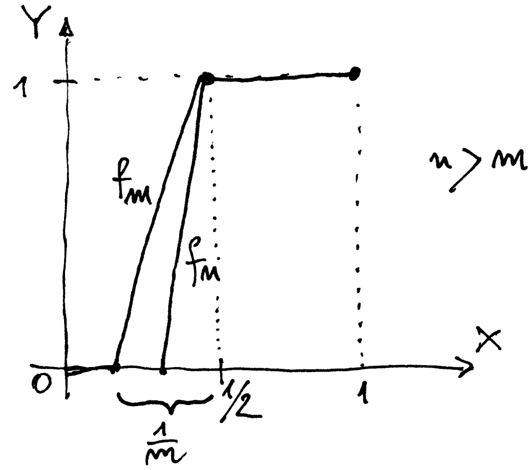
$$|f^*(t)-f^*(t')| \le |f^*(t)-f_N(t)| + |f_N(t)-f_N(t')| + |f_N(t')-f^*(t')| \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

co wobec dowolności $\varepsilon > 0$ zapewnia ciągłość funkcji f^*.

Przestrzeń $(C[0,1], d)$ nie jest przestrzenią zupełną.

Niech $\{f_n\}$ będzie ciągiem w $C[0,1]$ określonym następująco:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1 & \text{dla } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x \le \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{dla } \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases}$$



gdzie $n \ge 2$.

Ponieważ

$$d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)|\,dx \le$$
$$\le \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}} f_m(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

więc ciąg $\{f_n\}_{n\ge 2}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(C[0,1], d)$.

Załóżmy, że istnieje funkcja $f \in C[0,1]$ taka, że $d(f, f_n) \to 0$, gdy $n \to \infty$. Ponieważ

$$d(f_n, f) = \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|\,dx =$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |f(x)|\,dx + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f(x)|\,dx}_{\le \frac{1}{n}\cdot \max\{|f_n(x)-f(x)| : \frac{1}{2}-\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{2}\} \to 0} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1 - f(x)|\,dx$$

więc funkcja ciągła f musiałaby spełniać jednocześnie warunki

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|\,dx = 0 \quad \text{i} \quad \int_{\frac{1}{2}}^{1} |1-f(x)|\,dx = 0,$$

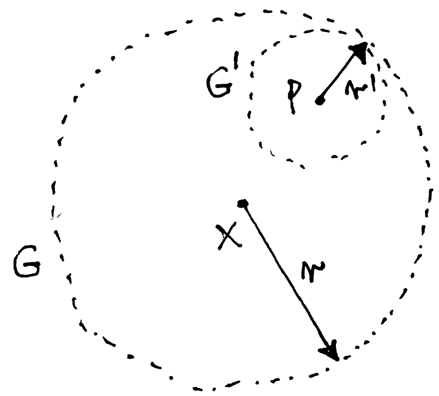
czyli $f(x) = 0$ dla $0 \leq x < \frac{1}{2}$ i $f(x) = 1$ dla $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, a to jest niemożliwe.

Struktura przestrzeni metrycznej pozwala na wyróżnienie zbiorów otwartych, domkniętych i zakotwiczenie pojęcia zbieżności.

Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $A \subset X$ nazywamy zbiorem otwartym, gdy dla każdego punktu $x \in A$ istnieje $r > 0$ takie, że zbiór $\{y \in X : d(y,x) < r\} \subset A$.

Przykład W dowolnej przestrzeni metrycznej (X,d) zbiór $G = \{y \in X : d(y,x) < r\}$, gdzie $r > 0$, jest zbiorem otwartym. Po pierwsze $G \neq \emptyset$, bo $x \in G$. Niech $p \in G$. Wtedy $d(p,x) < r$. Ustalmy $r' = r - d(p,x) > 0$. Pokażemy, że

$$(*) \quad G' = \{y \in X : d(y,p) < r'\} \subset \{y \in X : d(y,x) < r\} = G$$



Weźmy $z \in G'$, wtedy

$$d(z,x) \leq d(z,p) + d(p,x) < r' + d(p,x) = r - d(p,x) + d(p,x) = r,$$

czyli $z \in G$. Spełniony jest więc warunek $(*)$, który oznacza, że zbiór G jest otwarty.

Zbiór F zawarty w przestrzeni metrycznej (X,d) nazywamy domkniętym, gdy jego dopełnienie $(= X - F)$ jest zbiorem otwartym.

Następujące twierdzenie podaje fundamentalne własności zbiorów otwartych.

Twierdzenie Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną. Wtedy

(i) $\emptyset$ i X są zbiorami otwartymi;

(ii) suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym,

(iii) iloczyn skończonej ilości zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Dowód (i) Poprzednik implikacji w określeniu zbioru otwartego jest fałszywy ($x \in \emptyset$), więc cała implikacja jest prawdziwa. Zatem zbiór pusty $\emptyset$ jest zbiorem otwartym. Cała przestrzeń X jest zbiorem otwartym, bo dla dowolnego $x \in X$ i dowolnego $r > 0$ zbiór $\{y \in X : d(y,x) < r\} \subset X$.

(ii) Niech A_t, $t \in T \neq \emptyset$, będzie rodziną zbiorów otwartych w X. Jeżeli $x \in \bigcup_{t \in T} A_t$, to istnieje $t_0 \in T$ takie, że $x \in A_{t_0}$. Ponieważ zbiór A_{t_0} jest otwarty więc istnieje $r > 0$ takie, że

$$\{y \in X : d(y,x) < r\} \subset A_{t_0} \subset \bigcup_{t \in T} A_t ,$$

co oznacza, że zbiór $\bigcup_{t \in T} A_t$ jest zbiorem otwartym.

(iii) Załóżmy, że zbiory $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są otwarte w X. Jeżeli $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$, to jest to zbiór otwarty. Gdy $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, to $x \in A_1$ i $x \in A_2$ i ... i $x \in A_n$. Istnieją więc liczby $r_i > 0$ takie, że $\{y \in X : d(y,x) < r_i\} \subset A_i$ dla każdego $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Biorąc $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ mamy $\{y \in X : d(y,x) < r\} \subset$ $\subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, czyli zbiór $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ jest otwarty.

Uwaga Iloczyn nieskończenie wielu zbiorów otwartych może nie być zbiorem otwartym. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ zbiory $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, są otwarte, a ich iloczyn $\bigcap_{n \geq 1} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ nie jest zbiorem otwartym (jest zbiorem domkniętym).

Za sprawą praw de Morgana, dla zbiorów domkniętych prawdziwe jest twierdzenie dualne.

Twierdzenie Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wtedy

(i) $\emptyset$, X są zbiorami domkniętymi,

(ii) suma mnogościowa skończenie wielu zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym,

(iii) iloczyn dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Dowód warunku (iii) Jeżeli F_t, $t\in T\neq\emptyset$, jest rodziną zbiorów domkniętych w X, to ze względu prawa de Morgana [dopełnienie sumy jest równe iloczynowi dopełnień] mamy

$$\bigcap_{t\in T} F_t = \bigcap_{t\in T}\left[X\setminus(X\setminus F_t)\right] = X\setminus \underbrace{\left(\bigcup_{t\in T}(X\setminus F_t)\right)}_{\text{zbiór otwarty}}.$$

Zatem iloczyn $\bigcap_{t\in T} F_t$ jest zbiorem domkniętym jako dopełnienie zbioru otwartego.

Uwaga Suma mnogościowa nieskończenie wielu zbiorów domkniętych nie musi być zbiorem domkniętym. W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R},|\cdot|)$ zbiory $\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]$, $n\geq 2$, są domknięte, a zbiór $\bigcup_{n\geq 2}\left[-1+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=(-1,1)$ jest zbiorem otwartym.

Kolejną fundamentalną własnością przestrzeni metrycznej jest tzw. własność Hausdorffa: w przestrzeni metrycznej (X,d) dla każdej pary punktów $p,q\in X$ różnych $p\neq q$ istnieją ich rozłączne otoczenia tj. istnieją liczby $r_1,r_2>0$ takie, że

$$(**)\qquad \{y\in X: d(y,p)<r_1\}\cap\{y\in X: d(y,q)<r_2\}=\emptyset.$$

Istotnie, niech $p,q\in X$ i $p\neq q$. Oznaczmy $d(p,q)=r>0$. Przyjmijmy $r_1=r_2=\frac{r}{3}$. Wtedy spełniony jest warunek $(**)$. Przypuśćmy, że istnieje $z\in\{y\in X: d(y,p)<r_1\}\cap\{y\in X: d(y,q)<r_2\}$. Wówczas

$$r=d(p,q)\leq d(p,z)+d(z,q)<\frac{r}{3}+\frac{r}{3}<r.$$

Otrzymana sprzeczność kończy uzasadnienie.

Własność Hausdorffa zapewnia, że jeśli w przestrzeni metrycznej istnieje granica, to jest ona wyznaczona jednoznacznie. W ogólniejszych przestrzeniach topologicznych (nie posiadających własności Hausdorffa) sytuacja może być odmienna — ciąg może być zbieżny do wielu różnych granic. Tej tematyki nie będziemy rozwijać i pozostaniemy w przestrzeniach metrycznych.

Zbiór mały, czy duży?

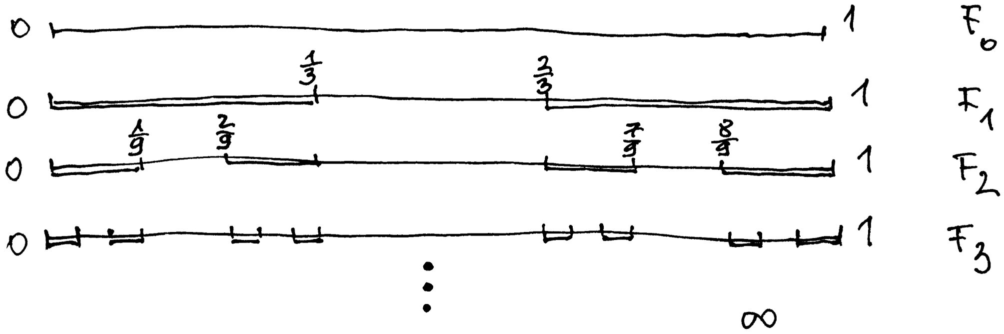
Na prostej euklidesowej $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ struktura zbiorów otwartych nie jest zbyt skomplikowana — można wykazać, że dowolny zbiór otwarty $A \subset \mathbb{R}$ jest sumą mnogościową co najwyżej przeliczalnej rodziny rozłącznych przedziałów otwartych.

W 1883 G. Cantor pokazał, że zbiory domknięte pozwalają na tworzenie bardziej skomplikowanych konstrukcji o zaskakujących własnościach.

Przykład (zbiór Cantora) W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ bierzemy zbiór $F_0 = [0,1]$. Przedział ten dzielimy na trzy równe części i usuwamy przedział otwarty $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Pozostaje zbiór domknięty $F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Z każdą składową zbioru F_1 postępujemy podobnie i otrzymujemy zbiór domknięty

$$F_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1].$$

Proces ten kontynuujemy uzyskując kolejne zbiory domknięte F_n, $n = 0, 1, 2, \dots$



Zbiorem Cantora nazywamy zbiór $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$. Zbiór Cantora jako iloczyn zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym. Należą do niego wszystkie punkty tworzonych podziałów: $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots$, więc $C \neq \emptyset$. Ponieważ suma długości usuniętych w konstrukcji odcinków wynosi

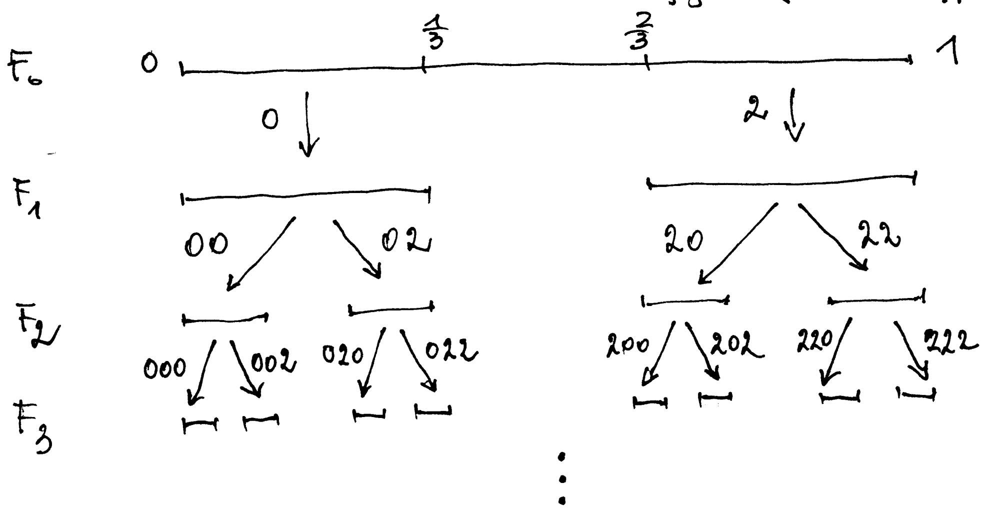
$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1,$$

więc zbiór Cantora C nie zawiera żadnego przedziału. Intuicyjnie "miara" zbioru C jest więc równa:

$$m(C) = 1 - \left\{ \underset{\text{odcinków otwartych}}{\text{miara długości usuniętych rozłącznych}} \right\} = 1 - 1 = 0.$$

Pokażemy teraz, że zbiór Cantora C jest zbiorem nieprzeliczalnym (musi więc zawierać liczby, które nie są wymierne!).

Rozważmy liczby postaci $c=(0,c_1c_2c_3\dots)_3$ zapisane w systemie trójkowym, gdzie $c_i\in\{0,2\}$. Zauważmy, że jeśli pierwsza cyfra $c_1=0$, to $c\in[0,\frac{1}{3}]$, a gdy $c_1=2$, to $c\in[\frac{2}{3},1]$. Podobnie, jeśli $c_2=0$, to $c=(0,0c_2c_3\dots)_3\in[0,\frac{1}{9}]$, zaś $c=(0,2c_2c_3\dots)_3\in[\frac{2}{3},\frac{7}{9}]$, itd. Schematycznie rozwinięcia trójkowe liczb ze zbioru Cantora wyglądają następująco



Z tej obserwacji wynika, że każdy punkt $c=(0,c_1c_2\dots)_3\in C$ należy do zbioru Cantora i jest wyznaczony jednoznacznie przez ciąg cyfr $c_1,c_2,\dots\in\{0,2\}$. Na przykład,

$$(0,0222\dots)_3=\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\dots=2\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots\right)=$$
$$=2\cdot\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{3}.$$

Ponieważ zbiór $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ (= wszystkich funkcji (ciągów) $f:\mathbb{N}\to\{0,2\}$) jest nieprzeliczalny, więc zbiór Cantora C jest zbiorem nieprzeliczalnym.

Przykład ten pokazuje, że określenie (porównywanie) wielkości zbiorów może być / jest (?) kłopotliwe. Zbiór Cantora z punktu widzenia miary jest mały, a z punktu liczby elementów, które ten zbiór tworzą jest zbiorem dużym (większym niż zbiór wszystkich liczb wymiernych).

<u>Kresem górnym</u> zbioru $A\subset\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych nazywamy najmniejszą liczbę rzeczywistą K taką, że $\forall_{x\in A}\ x\leq K$. Kres górny oznaczamy $\sup A$ (supremum). Jeśli zbiór A jest nieograniczony z góry, to $\sup A=+\infty$.

<u>Kresem dolnym</u> zbioru $B\subset\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych nazywamy

największą liczbę rzeczywistą k taką, że $\forall_{x \in B} \; k \le x$.
Kres dolny oznaczamy $\inf B$ (infimum). Jeśli zbiór B jest nieograniczony z dołu, to $\inf B = -\infty$.
Istnienie kresu górnego (- dolnego) dla niepustego zbioru ograniczonego od góry (- dołu) jest zapewnione dzięki aksjomatowi ciągłości dla liczb rzeczywistych.

Miara Jordana (XIX w.)

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczonym podzbiorem prostej euklidesowej.
Miarą zewnętrzną zbioru A nazywamy kres dolny sum długości skończonej rodziny [rozłącznych] odcinków zawierającej zbiór A:
$$m^*(A) \stackrel{\text{df}}{=} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{m} |I_m| : A \subset \bigcup_{i=1}^{m} I_m \right\}.$$

Miarą wewnętrzną zbioru A nazywamy kres górny sum długości skończonej rodziny rozłącznych odcinków zawartych w zbiorze A:
$$m_*(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{m} |J_k| : \bigcup_{k=1}^{m} J_k \subset A \right\}.$$

Jeśli dla zbioru $A \subset \mathbb{R}$ jego miara zewnętrzna i wewnętrzna są sobie równe, to zbiór A nazywamy mierzalnym w sensie Jordana i tę wspólną wartość nazywamy miarą zbioru A.

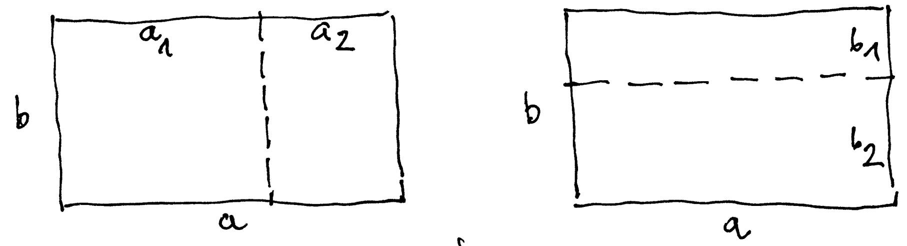
Przykład
1) Zbiór pusty jest mierzalny w sensie Jordana i $m(\emptyset) = 0$.
Miara jest funkcją nieujemną, $0 \le m_*(A) \le m^*(A)$ i $m^*(\emptyset) = 0$, więc $m(\emptyset) = 0$.
2) Miara przedziału I o końcach a, b, gdzie $a < b$ jest równa $m(I) = b - a$. Zbiór złożony z jednego punktu $I = \{a\} \subset \mathbb{R}$ ma miarę $m(\{a\}) = 0$
3) Zbiór Cantora ma miarę Jordana $m(C) = 0$. Zbiór C zawiera się w każdym ze zbiorów F_n. Ponieważ $m(F_n) = 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$, więc $m^*(C) = 0$, a w konsekwencji $m(C) = 0$.

Niestety nie każdy ograniczony zbiór $A \subset \mathbb{R}$ prostej euklidesowej jest mierzalny w sensie Jordana.
Przykład Zbiór $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ ma miarę zewnętrzną $m^*(A) = 1$, ale ponieważ w zbiorze A nie zawiera się żaden przedział (zbiór liczb wymiernych jest zbiorem gęstym), więc miara wewnętrzna $m_*(A) = 0$. Ponieważ $m_*(A) \ne m^*(A)$, więc zbiór A nie jest mierzalny w sensie Jordana. To samo dotyczy zbioru liczb niewymiernych przedziału $[0,1]$.

W kolejnym kroku podjęte zostały prace nad rozszerzeniem pomysłu Jordana (mierzenia pola figury krzywoliniowej) na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$.

Rozpoczniemy od powiedzenia dlaczego pole prostokąta o bokach długości a i b jest równe $a \cdot b$. Pole prostokąta $P(a,b)$ jest (powinno być) funkcją $P: [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ o następującej własności:

jeśli prostokąt podzielimy odcinkiem równoległym do któregokolwiek boku, to suma pól powstałych w ten sposób dwóch prostokątów jest równa polu wyjściowego prostokąta.



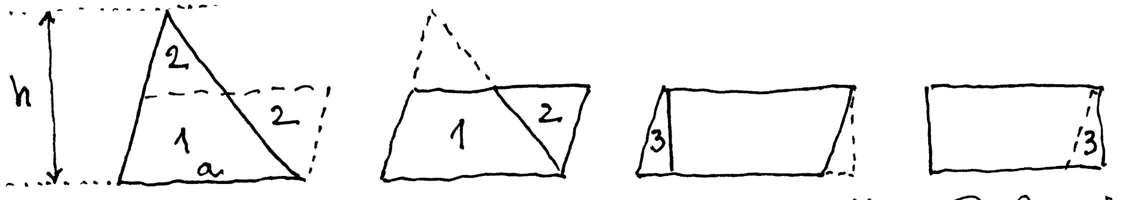
Funkcja P powinna spełniać warunki:

$$P(a_1+a_2, b) = P(a_1,b) + P(a_2,b),$$
$$P(a, b_1+b_2) = P(a,b_1) + P(a,b_2).$$

Oczywiście P powinna być funkcją ciągłą: niewielka zmiana długości boków powinna pociągać niewielką zmianę wartości pola.

Ponieważ każde z powyższych równań przypomina tzw. równanie funkcyjne Cauchy'ego $f(x+y) = f(x) + f(y)$, więc zadanie sprowadza się do wyznaczenia funkcji $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ ciągłej spełniającej równanie Cauchy'ego dla wszystkich $x, y \in [0,\infty)$. Powyższe równanie funkcyjne Cauchy'ego w klasie funkcji ciągłych posiada dokładnie jedno rozwiązanie postaci $f(x) = k \cdot x$, gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności ($k \geq 0$). Zatem pole prostokąta o bokach długości a i b można wyrazić tylko wzorem $P(a,b) = a \cdot b$, gdy przyjmiemy $k = 1$.

W starożytności, aby wyznaczyć pole wielokąta dzielono wielokąt na trójkąty i składano z nich figurę, której pole było znane (wiadomo było jak je obliczyć).

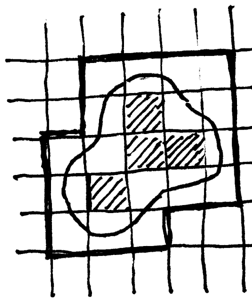


$P(\Delta) = \frac{1}{2} a \cdot h$

Dopiero w latach 1832-1833 F. Bolyai [Bojoj] i P. Gerwien wykazali, że dwa wielokąty można rozciąć na identyczne zestawy trójkątów wtedy i tylko wtedy, gdy wielokąty te mają równe pola.

Niestety ta idea nie działa w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$. W latach 1900–1902 Max Dehn podał przykład dwóch czworościanów o równych podstawach i wysokościach, które nie są równoważne przez podział skończony. Wzoru na objętość czworościanu nie można wyprowadzić elementarnie.

W tej sytuacji idea miary w sensie Jordana była bardzo atrakcyjna. Opiszemy ją w przypadku płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ (uogólnienie na $\mathbb{R}^3$ jest łatwe). Chcąc zmierzyć pole zbioru $A \subset \mathbb{R}^2$ pokrywamy go siatką kwadratów o boku ε i obliczamy dwie liczby:



$N(\varepsilon)$ = liczba kwadratów przecinających zbiór A (najmniejsze pokrycie zbioru A kwadratami siatki),

$M(\varepsilon)$ = liczba kwadratów zawartych w zbiorze A.

Następnie przechodzimy do granicy dla $\varepsilon \to 0$ i przyjmujemy

$$m(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \cdot N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \cdot M(\varepsilon),$$

o ile obie granice istnieją i są równe.

Opisana miara Jordana odpowiada pojęciu długości (w $\mathbb{R}$), pola (w $\mathbb{R}^2$) czy objętości (w $\mathbb{R}^3$). Jej praktyczną realizacją jest całka Riemanna (z 1851 roku): Niech $f: [a,b] \to [0,\infty)$. Całka $\int_a^b f$ równa się granicy $\lim \sum_{i=1}^{N} f(y_i) \cdot |x_{i+1} - x_i|$, gdzie punkty $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{N+1} = b$ tworzą rozbicie odcinka $[a,b]$ na pododcinki $\Delta_i = [x_i, x_{i+1}]$ zawierające punkty y_i, tak, że $\max |\Delta_i| \to 0$. Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemanna, o ile powyższa granica istnieje i nie zależy od wyboru podziałów i punktów y_i. Całka Riemanna jest dobrze określona dla funkcji ciągłych i kawałkami ciągłych.

Miarą podzbioru A prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ jest całka Riemanna funkcji charakterystycznej zbioru A, $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in A \\ 0 & \text{dla } x \notin A \end{cases}$. Na przykład, dla $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ całka Riemanna $\int_0^1 \chi_A(x)\,dx$ nie jest określona, bo wybierając stale $y_i \in \mathbb{Q}$ suma $\sum_{i=1}^{N} \chi_A(y_i) |x_{i+1} - x_i| = 1$, a wybierając stale $y_i \notin \mathbb{Q}$ suma $\sum_{i=1}^{N} \chi_A(y_i) |x_{i+1} - x_i| = 0$.

Choć całka Riemanna rozwiązuje całe mnóstwo problemów obliczeniowych, to z punktu widzenia zastosowań nie jest pozbawiona wad. Stosowanie skończonej addytywności nie wytrzymało próby czasu w zaawansowanej analizie i rachunku prawdopodobieństwa.

Potrzebna była bardziej ogólna teoria miary, uwzględniająca przeliczalną addytywność (pokrywanie zbiorów przeliczalnymi, a nie skończonymi rodzinami zbiorów). Najbardziej trafna okazała się teoria Lebesgue'a z początku XX wieku (z lat 1900-1905).

Miarą zewnętrzną Lebesgue'a zbioru $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy liczbę nieujemną, równą kresowi dolnemu sum długości dowolnych przedziałów domkniętych będących przeliczalnym pokryciem zbioru A:

$$m_L^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n \text{ są domknięte} \right\}.$$

Istotna różnica między miarą zewnętrzną Jordana, a miarą zewnętrzną Lebesgue'a jest taka, że dla zbioru $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $m^*(A) = 1$, a miara zewnętrzna Lebesgue'a $m_L^*(A) = 0$.

Istotnie, zbiór $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ jest przeliczalny, jego elementy ustawiamy w ciąg $\{q_1, q_2, \dots\}$ i pokrywamy kolejne elementy przedziałami długości $\frac{\varepsilon}{2^i}$, $i = 1, 2, \dots$, gdzie $\varepsilon > 0$. Wtedy $m_L^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$. Z dowolności wyboru $\varepsilon > 0$ wynika, że $m_L^*(A) = 0$.

Miara zewnętrzna Lebesgue'a jest miarą Lebesgue'a na zbiorach mierzalnych w sensie Lebesgue'a (ale o tym powiemy później). Niestety i w tym przypadku nie wszystkie zbiory można zmierzyć, choć klasa zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a jest bardziej obszerna (większa) niż klasa zbiorów mierzalnych w sensie Jordana.

Przykład (G. Vitali, 1905)

Przesuwając zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ o liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$ tworzymy zbiory $\mathbb{Q}_\alpha = \{t + \alpha : t \in \mathbb{Q}\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Na przykład, $\mathbb{Q}_{\sqrt{2}} = \{t + \sqrt{2} : t \in \mathbb{Q}\}$. Jeśli $\alpha \in \mathbb{Q}$, to $\mathbb{Q}_\alpha = \mathbb{Q}$. Ponieważ $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_7$, $\mathbb{Q}_{\sqrt{2}} = \mathbb{Q}_{\sqrt{2}+m}$, więc zbiory $\mathbb{Q}_\alpha$ i $\mathbb{Q}_\beta$, dla których $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}$, utożsamiamy. Rozbijamy w ten sposób zbiór liczb rzeczywistych na rozłączne klasy abstrakcji. Każda taka klasa abstrakcji ma reprezentanta w przedziale $[0,1]$. Korzystając z aksjomatu wyboru, z każdego z dopuszczalnych zbiorów $\mathbb{Q}_\alpha$ wybieramy po jednym punkcie i to tak, by należał on do przedziału $[0,1]$. Otrzymany w ten sposób zbiór $V \subset [0,1]$ zawiera dokładnie jednego reprezentanta każdej klasy abstrakcji i nie ma w nim liczb, których różnica jest wymierna.

Rozpatrzmy zbiór $W = \bigcup_{t\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} (t+V)$, tzn. sumę mnogościową przesunięć $t+V$ zbioru V o wektory wymierne t z przedziału $[-1,1]$. Ponieważ $V \subset [0,1]$, więc $W \subset [-1,2]$. Oczywiście dla różnych $t_1, t_2 \in [-1,1]\cap\mathbb{Q}$ zbiory t_1+V i t_2+V są rozłączne (gdyby dla pewnych $v_1, v_2 \in V$, $t_1+v_1 = t_2+v_2$, to $v_1-v_2 = t_2-t_1 \in \mathbb{Q}$, czyli v_1 i v_2 byłyby elementami tej samej klasy abstrakcji, wbrew definicji zbioru V). Ponadto, dla każdego $t \in [-1,1]\cap\mathbb{Q}$, $m_L(t+V) = m_L(V)$, o ile założymy, że zbiór V jest mierzalny w sensie Lebesgue'a. Wówczas

$$3 = m_L([-1,2]) \geq m_L(W) = \sum_{t\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} m_L(t+V) =$$
$$= m_L(V) + m_L(V) + \dots$$

Gdyby $m_L(V) > 0$, to prawa strona byłaby nieskończona. Zatem $m_L(V) = 0$, a stąd zaś $m_L(W) = 0+0+\dots = 0$. Z drugiej strony, zbiór W zawiera cały przedział $[0,1]$ (niech $x \in [0,1]$, wybieramy $v \in V$ tak, aby $x - v \in \mathbb{Q}$, tj. elementy v i x należą do tej samej klasy $\mathbb{Q}_\alpha$. Wtedy $x = (x-v)+v = t+v \in t+V \subset W$), skąd $1 = m_L([0,1]) \leq m_L(W) = 0$. Sprzeczność! Zatem przypuszczenie, że V jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a prowadzi do sprzeczności.

Pokazuje to, że nie wszystkie zbiory można zmierzyć i jakieś ograniczenie klasy zbiorów, dla których możemy sensownie określić miarę jest konieczne.

Miara

Na przełomie XIX/XX wieku pojawiła się potrzeba ujednoliconego podejścia do określenia długości, pola, objętości zbiorów w przestrzeni euklidesowej. Już wiemy, że funkcji takiej nie można (czasami) określić na wszystkich zbiorach. Z drugiej strony dziedzina takiej funkcji powinna być nie tyle bogata, by sprostać naszym oczekiwaniom i umożliwić funkcji realizację warunku przeliczalnej addytywności: jeśli zbiory $A_1, A_2, \ldots$ są parami rozłączne, tj. $A_n \cap A_k = \emptyset$ dla $n \neq k$, $n, k \in \mathbb{N}$, to

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

Wprowadzenie pojęcia miary nie wymaga, by przestrzeń X posiadała jakąkolwiek strukturę topologiczną czy metryczną!

Definicja

Niepustą rodzinę $\mathcal{M}$ zbiorów ustalonej przestrzeni X nazywamy σ-ciałem zbiorów (sigma ciałem ...) lub ciałem przeliczalnie addytywnym zbiorów wtedy i tylko wtedy, gdy

1) $\emptyset \in \mathcal{M}$,
2) jeśli $A \in \mathcal{M}$, to $X \setminus A \in \mathcal{M}$,
3) dla wszystkich zbiorów $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ zbiór $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

Z powyższych warunków wynikają kolejne własności σ-ciała zbiorów.

(i) $X \in \mathcal{M}$. Wynika to z 1) i 2), gdyż $X = X \setminus \emptyset$.

(ii) jeśli $A, B \in \mathcal{M}$, to $A \cap B \in \mathcal{M}$.
Jest to konsekwencją działań na zbiorach i praw de Morgana,
$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \in \mathcal{M},$$
więc $A \cap B = X \setminus [X \setminus (A \cap B)] \in \mathcal{M}$.

(iii) jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$, to $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.
Powtarzamy powyższe rozumowanie. Jeśli $A_i \in \mathcal{M}$, to $X \setminus A_i \in \mathcal{M}$.
Zatem $X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} (X \setminus A_i) \in \mathcal{M}$, a w konsekwencji
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = X \setminus \left[X \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right] \in \mathcal{M}.$$

(iv) jeżeli $A, B \in \mathcal{M}$, to $A \setminus B \in \mathcal{M}$.
Jest to konsekwencją działań na zbiorach: $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$.

Przykłady (σ-ciał zbiorów)

1) Rodzina 2^X wszystkich podzbiorów zbioru X jest σ-ciałem w X.

2) Rodzina $\mathcal{M} = \{\phi, X\}$ jest σ-ciałem w X.

3) Jeżeli A jest ustalonym podzbiorem zbioru X, to rodzina $\mathcal{M} = \{\phi, X, A, X \setminus A\}$ jest najmniejszym σ-ciałem zbiorów w X zawierającym zbiór A.

Uwaga Jeśli σ-ciało zbiorów $\mathcal{M}$ jest generowane przez dowolną nieskończoną rodzinę zbiorów, to na ogół nie daje się go opisać jawnym sposobem.

σ-ciała zbiorów będą dziedzinami, na których będziemy określać miarę. W pierwszej kolejności od dziedziny - rodziny zbiorów $\mathcal{M}$ będziemy oczekiwać by miała ona tę własność, że suma przeliczal-nej rodziny zbiorów należących do $\mathcal{M}$ należy również do $\mathcal{M}$. Podkreślmy jednak, że zwykle od dziedziny $\mathcal{M}$ żądamy nieco więcej, a mianowicie, by w wyniku działań mnogościowych wykonywanych na przeliczalnej rodzinie zbiorów należących do $\mathcal{M}$, otrzymać zawsze zbiory należące do rodziny $\mathcal{M}$.

Ponieważ miara będzie przyjmować tzw. wartości rzeczywiste rozszerzone, czyli ze zbioru $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, to przyjmujemy dodatkowe umowy dotyczące wykonalności działań. Przyjmujemy, że $0 \cdot (\pm\infty) = 0$, działanie $(-\infty) + (+\infty)$ jest nieokreślone, a pozostałe działania są zgodne z odpowiednimi działaniami dla granic niewłaściwych.

Definicja (miary)
Niech $\mathcal{M}$ będzie ustalonym σ-ciałem zbiorów danej przestrzeni X.
Miarą na σ-ciele $\mathcal{M}$ nazywamy funkcję $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ taką, że:

1) $\mu(\phi) = 0$,

2) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ dla każdego ciągu zbiorów $\{A_i\} \subset \mathcal{M}$ parami rozłącznych (tzn. μ jest przeliczalnie addytywną funkcją zbioru).

Jeżeli μ jest miarą na σ-ciele $\mathcal{M}$ w przestrzeni X, to trójkę $(X, \mathcal{M}, \mu)$ nazywamy przestrzenią z miarą lub przestrzenią mierzalną.
Zbiory należące do σ-ciała $\mathcal{M}$, na którym określona została miara μ nazywamy zbiorami μ-mierzalnymi lub krótko zbiorami

mierzalnymi.

Przykład. Niech $\mathcal{M} = 2^{\mathbb{N}}$ będzie σ-ciałem zbiorów w zbiorze liczb naturalnych. Możemy określić miarę liczącą $\mu : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$, która każdemu zbiorowi $A \subset \mathbb{N}$ przypisuje liczbę jego elementów: $\mu(A) = \# A$.

Jeśli $\mathcal{M} = 2^{\mathbb{R}^2}$ jest σ-ciałem zbiorów na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ (= rodzina wszystkich podzbiorów płaszczyzny $\mathbb{R}^2$), to miarą jest funkcja $\mu : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$, która każdemu zbiorowi $A \subset \mathbb{R}^2$ przypisuje liczbę $\mu(A) = \{$liczbie elementów o współrzędnych całkowitych $(n,k) \in A\}$.

Każda miara μ określona na σ-ciele zbiorów $\mathcal{M}$ ma następujące własności:

(1) jest monotoniczna, tzn. jeśli $A, B \in \mathcal{M}$ i $A \subset B$, to $\mu(A) \leq \mu(B)$. Istotnie, wtedy $B = A \cup (B \setminus A)$, gdzie $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$, więc $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geqslant \mu(A)$, bo miara jest funkcją nieujemną i $\mu(B \setminus A) \geqslant 0$.

(2) jeśli $A, B \in \mathcal{M}$, $\mu(A) < +\infty$ i $A \subset B$, to $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(3) jeśli ciąg zbiorów $\{A_i\} \subset \mathcal{M}$, ale zbiory A_i nie muszą być parami rozłączne, to $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

W tym przypadku tworzymy zbiory $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$, ..., $B_n = A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})$, ..., które są mierzalne, parami rozłączne oraz $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, przy czym $B_i \subset A_i$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Zatem z przeliczalnej addytywności oraz z monotoniczności miary $(\mu(B_i) \leq \mu(A_i))$ mamy

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Jeśli $A \in \mathcal{M}$ i $\mu(A) = 0$, to mówimy, że zbiór A jest miary μ-zero (lub krótko: zbiorem miary zero). Z monotoniczności miary i ostatniej własności wynika, że

- jeśli $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$ i $B \in \mathcal{M}$ i $B \subset A$, to $\mu(B) = 0$;
- suma przeliczalnej lub skończonej ilości zbiorów miary zero jest zbiorem miary zero.

Oczywiście istnieją zbiory nieprzeliczalne, które mają miarę zero (zbiór Cantora) oraz w zbiorze miary zero może się pojawić zbiór niemierzalny.

Jeśli każdy podzbiór dowolnego zbioru miary μ zero jest mierzalny (wtedy z konieczności ma on miarę zero), to taką miarę μ nazywamy miarą zupełną.

Zbiory różniące się o zbiór miary zero są w pewnym sensie sobie równoważne: mówimy, że zbiory $A, B \in \mathcal{M}$ różnią się o zbiór miary zero, gdy $\mu(A \setminus B) = \mu(B \setminus A) = 0$.

Często zjawiska matematyczne zachodzące na zbiorach miary zero pomijamy. Używamy wtedy specyficznej terminologii. Niech $W(x)$ będzie warunkiem na zbiorze $x \in E$, gdzie $E \in \mathcal{M}$ i $\mu(E) > 0$, ale interesujący nas warunek $W(x)$ nie jest spełniony dla $x \in Z \subset E$, gdzie $\mu(Z) = 0$. Mówimy wtedy, że warunek $W(x)$ jest spełniony prawie wszędzie w zbiorze E. Prawie wszystkie liczby rzeczywiste są niewymierne!

Kolejne własności miary.

(4) Jeśli $A, B \in \mathcal{M}$, to $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$.
Gdy $\mu(A \cap B) = +\infty$, to także $\mu(A \cup B) = +\infty$, bo $A \cup B \supset A \cap B$.
Przypuśćmy, że $\mu(A \cap B) < +\infty$. Wtedy

$$A \cup B = \underbrace{[A \setminus (A \cap B)] \cup [B \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B)}_{\text{te składniki są parami rozłączne}},$$

więc

$$\mu(A \cup B) = \mu(\dots) = \mu[A \setminus (A \cap B)] + \mu[B \setminus (A \cap B)] + \mu(A \cap B) =$$
$$= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) =$$
$$= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

(5) jeżeli $\{A_i\} \subset \mathcal{M}$ i $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, to $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$;

(6) jeżeli $\{A_i\} \subset \mathcal{M}$, $\mu(A_1) < +\infty$ i $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, to $\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) =$

$$= \lim_{i \to \infty} \mu(A_i).$$

Ważnym przykładem miary w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ jest miara Lebesgue'a, którą teraz opiszemy.

Przedziałami domkniętymi w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy zbiory

$$\Delta = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i\},$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ są danymi liczbami rzeczywistymi.
Objętością przedziału $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ jest liczba $\operatorname{vol} \Delta = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n)$.
Zbiór pusty ($\emptyset$) zaliczamy do przedziałów domkniętych i przyjmujemy, że $\operatorname{vol}(\emptyset) = 0$.
Gdy istnieje wskaźnik "i" taki, że $b_i = a_i$ w określeniu przedziału Δ, to taki przedział nazywamy zdegenerowanym i dla takiego przedziału $\operatorname{vol} \Delta = 0$.

Jasne jest, że jeśli $\Delta \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_k$, to $\operatorname{vol} \Delta \leq \operatorname{vol} \Delta_1 + \ldots + \operatorname{vol} \Delta_k$, a jeśli przedziały z rodziny $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ nie mają wspólnych punktów wewnętrznych ($\operatorname{int} \Delta_i \cap \operatorname{int} \Delta_j = \emptyset$, $i \neq j$), to z warunku $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_k$ wynika, że $\operatorname{vol} \Delta = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{vol} \Delta_i$.

Ponieważ rodzina przedziałów domkniętych $\{ \Delta_i = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : -i \leq x_k \leq i$ dla $k = 1, 2, \ldots, n \} \}$ (= coraz większe "sześciany" o środku w punkcie $(0, 0, \ldots 0) \in \mathbb{R}^n$) pokrywa całą przestrzeń: $\mathbb{R}^n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i$, więc dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ istnieje ciąg przedziałów domkniętych $\{\Delta_i\}$ pokrywających zbiór A. Pozwala to przyjąć następującą definicję.

Definicja (miary zewnętrznej Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$)
Miarą zewnętrzną Lebesgue'a $\mu^*(A)$ dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy wartość:
$$\mu^*(A) = \inf_{\{\Delta_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol} \Delta_i : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \right\},$$
będącą kresem dolnym zbioru liczb (z dołączeniem $+\infty$) $\sum_{i=1}^{\infty} \operatorname{vol} \Delta_i$ utworzonych dla dowolnych przeliczalnych pokryć zbioru A przedziałami domkniętymi.

Miara zewnętrzna Lebesgue'a spełnia warunki: jest określona na σ-ciele zbiorów $\mu^* : 2^{\mathbb{R}^n} \longrightarrow [0, +\infty]$ oraz $\mu^*(\emptyset) = 0$. Jednak miara zewnętrzna Lebesgue'a nie spełnia warunku przeliczalnej addytywności, więc nie jest miarą! Gdyby miara zewnętrzna była przeliczalnie addytywna to zbiór Vitaliego byłby mierzalny. Co w tej sytuacji należało zrobić? Rozwiązaniem okazało się ograniczenie dziedziny funkcji μ^* do zbiorów $A \subset \mathbb{R}^n$, które spełniają warunek Carathéodory'ego
$$\forall_{Z \subset \mathbb{R}^n} \quad \mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \setminus A).$$

Sens tego warunku można opisać następująco: weźmy dwa dowolne zbiory $Z_1 \subset A$ i $Z_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus A$. Biorąc $Z = Z_1 \cup Z_2$ mamy, $Z \cap A = Z_1$ i $Z \setminus A = Z_2$. Stąd warunkiem równoważnym z warunkiem Carathéodory'ego jest
$$\forall_{\substack{Z_1 \subset A \\ Z_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus A}} \quad \mu^*(Z_1 \cup Z_2) = \mu^*(Z_1) + \mu^*(Z_2)$$
(dla dowolnych zbiorów Z_1 i Z_2 oddzielonych zbiorem A spełniony jest warunek addytywności miary zewnętrznej).

Twierdzenie

Rodzina $\mathcal{M}_n \subset 2^{\mathbb{R}^n}$ zbiorów $A \subset \mathbb{R}^n$ spełniających warunek Carathéodory'ego jest σ-ciałem zbiorów. n-wymiarowa miara zewnętrzna Lebesgue'a obcięta do σ-ciała $\mathcal{M}_n$, tj. $m_L = \mu^* : \mathcal{M}_n \to [0, +\infty]$ jest miarą Lebesgue'a zbiorów w $\mathbb{R}^n$ (- spełnia warunek przeliczalnej addytywności). Miara Lebesgue'a jest miarą zupełną.
Zbiory należące do σ-ciała zbiorów $\mathcal{M}_n$ nazywamy zbiorami mierzalnymi w sensie Lebesgue'a lub krótko mierzalnymi.

Klasa zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a jest obszerna:
- każdy skończony lub przeliczalny zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a i $m_L(A) = 0$;
- mierzalne w sensie Lebesgue'a są wszystkie zbiory otwarte, wszystkie zbiory domknięte w $\mathbb{R}^n$. W szczególności dla dowolnego prostokątu domkniętego $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, $m_L(\Delta) = \operatorname{vol} \Delta$;
- jeżeli zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest mierzalny w sensie Jordana, to jest też mierzalny w sensie Lebesgue'a i obydwie miary są sobie równe. (Wiemy już, że istnieją zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a, które nie są mierzalne w sensie Jordana.)

Wskażemy jeszcze kryteria mierzalności zbiorów w sensie Lebesgue'a.

Twierdzenie Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest mierzalny w sensie Lebesgue'a wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków:
1) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty $G \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $A \subset G$ i $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$,
2) dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór domknięty $F \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $F \subset A$ i $\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

Można pokazać, że:
(i) każdy zbiór $A \subset \mathbb{R}$ o dodatniej mierze zewnętrznej Lebesgue'a zawiera w sobie pewien zbiór niemierzalny.
(ii) odwzorowanie ciągłe może przeprowadzać pewne zbiory miary zero na zbiory o mierze dodatniej.

Funkcje mierzalne

W dotychczasowej praktyce matematycznej posługując się funkcjami zwracaliśmy uwagę na to, czy funkcje te są ciągłe (np. jeśli funkcja jest różniczkowalna, to jest ciągła). Pamiętamy, że funkcja $f: X \to Y$ z przestrzeni metrycznej X w przestrzeń metryczną Y jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz $f^{-1}(G)$ dowolnego zbioru otwartego $G \subset Y$ w przestrzeni Y jest zbiorem otwartym w X.

Zajmiemy się teraz funkcjami $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, gdzie $(X, \mathcal{M}, \mu)$ jest przestrzenią mierzalną. W zbiorze X nie musi być opisana metryka, więc zwracanie uwagi na "ciągłość" nie ma sensu. Naturalną strukturą w przestrzeni mierzalnej jest jej σ-ciało zbiorów $\mathcal{M}$. Ma więc sens rozpatrywanie funkcji f, dla których przeciwobrazy zbiorów otwartych w $\mathbb{R}$ będą należeć do σ-ciała $\mathcal{M}$. Takie funkcje nazwiemy mierzalnymi i będą one pełniły podobną rolę, jak funkcje ciągłe w klasycznej analizie.

<u>Definicja</u> Niech $(X, \mathcal{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną i $A \in \mathcal{M}$. Funkcję $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy <u>mierzalną</u>, gdy dla każdej liczby $a \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in A : f(x) < a\}$ jest mierzalny.

<u>Twierdzenie</u> Funkcja $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z warunków:

(1) $\forall_{a \in \mathbb{R}} \quad \{x \in A : f(x) < a\} \in \mathcal{M}$,

(2) $\forall_{a \in \mathbb{R}} \quad \{x \in A : f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$,

(3) $\forall_{a \in \mathbb{R}} \quad \{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$,

(4) $\forall_{a \in \mathbb{R}} \quad \{x \in A : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$.

Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$, zbiory pojawiające się po prawej stronie są mierzalne.

(1) $\Rightarrow$ (2), bo $\quad \{x \in A : f(x) \leq a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) < a + \frac{1}{i}\}$.

(2) $\Rightarrow$ (3), bo $\quad \{x \in A : f(x) > a\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \leq a\}$.

(3) $\Rightarrow$ (4), bo $\quad \{x \in A : f(x) \geq a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) > a - \frac{1}{i}\}$.

(4) $\Rightarrow$ (1), bo $\quad \{x \in A : f(x) < a\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \geq a\}$.

<u>Przykład</u>

1) Funkcja sinus jest mierzalna w sensie Lebesgue'a, gdyż

$$\{x\in\mathbb{R} : \sin x < a\} = \begin{cases} \emptyset , & a \leq -1 , \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i , & -1 < a \leq 1 \\ \mathbb{R} , & a > 1 , \end{cases}$$

i zbiory z prawej strony są mierzalne w sensie Lebesgue'a.

2) Niech $X = [0,1]$, $\mathcal{M}$ będzie σ-ciałem zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a w przedziale $[0,1]$ i $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x\in A, \\ 0 & \text{dla } x \in X\setminus A, \end{cases}$

funkcją charakterystyczną zbioru $A \subset [0,1]$. Dla dowolnego $a\in\mathbb{R}$,

$$\{x\in[0,1] : \chi_A(x) > a\} = \begin{cases} [0,1] & \text{dla } a < 0 , \\ A & \text{dla } 0 \leq a < 1 , \\ \emptyset & \text{dla } a \geq 1 . \end{cases}$$

Ponieważ zawsze $\emptyset \in \mathcal{M}$ i $[0,1] = X \in \mathcal{M}$, więc funkcja χ_A jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy $A \in \mathcal{M}$, czyli A jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a. Ponieważ w przedziale $[0,1]$ istnieją zbiory niemierzalne w sensie Lebesgue'a (zbiór Vitaliego), więc istnieją funkcje ograniczone w przedziale $[0,1]$, niemierzalne w sensie Lebesgue'a.

W szczególności funkcja charakterystyczna zbioru $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ jest funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a (ale jest funkcją niemierzalną w sensie Jordana).

Opiszemy teraz własności funkcji mierzalnych.

1) Jeśli $f,g : A \to \overline{\mathbb{R}}$, $A \in \mathcal{M}$, są funkcjami mierzalnymi, to mierzalne są zbiory

$$\{x\in A : f(x) > g(x)\} , \ \{x\in A : f(x) \leq g(x)\} , \ \{x \in A : f(x) = g(x)\} .$$

Istotnie, ponieważ zbiór $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych jest gęsty, więc

$$\{x\in A : f(x) > g(x)\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(\{x\in A : f(x) > q\} \cap \{x \in A : q > g(x)\}\right) ,$$

a zbiory po prawej stronie są mierzalne. Podobnie,

$$\{x\in A : f(x) \leq g(x)\} = A \setminus \{x\in A : f(x) > g(x)\} ,$$

$$\{x\in A : f(x) = g(x)\} = \{x\in A : f(x) \leq g(x)\} \cap \{x\in A : f(x) \geq g(x)\} .$$

2) Mierzalne są również zbiory $\{x\in A : f(x) = a\}$, $\{x\in A : f(x) \neq a\}$, gdzie $a\in\mathbb{R}$ lub $a = \pm\infty$.

3) Załóżmy, że $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a funkcje $f,g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne. Wówczas mierzalna jest każda z funkcji (tam gdzie jest sensownie określona):

$$\alpha\cdot f , \ \alpha\cdot f + \beta\cdot g , \ f^2 , \ f\cdot g , \ |f| , \ \max\{f,g\} , \ \min\{f,g\} .$$

Na przykład, mierzalność funkcji f^2 wynika z równości:

$$\{x\in A : f^2(x) < a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{dla } a \leq 0, \\ \{x\in A : f(x) < \sqrt{a}\} \cap \{x \in A : -\sqrt{a} < f(x)\} & \text{dla } a > 0. \end{cases}$$

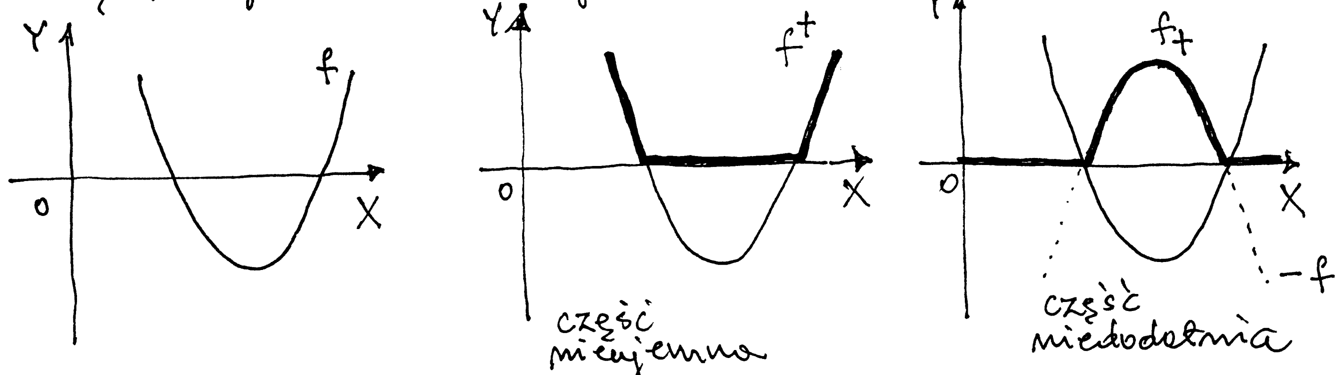
Dla $f\cdot g$ możemy skorzystać z zależności: $f\cdot g = \frac{1}{4}\cdot\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$.

Również

$$\{x\in A : \max\{f(x), g(x)\} < a\} = \{x\in A : f(x) < a\} \cap \{x\in A : g(x) < a\},$$

$$\{x\in A : \min\{f(x), g(x)\} < a\} = \{x\in A : f(x) < a\} \cup \{x\in A : g(x) < a\}.$$

4) Jeżeli $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, to funkcje $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f_+ = \max\{-f, 0\}$ (zwane <u>częścią nieujemną</u> oraz <u>częścią niedodatnią</u>, odpowiednio) też są funkcjami mierzalnymi.



Można zauważyć, że: $f = f^+ - f_+$, $|f| = f^+ + f_+$.

5) Jeżeli funkcje $f_1, f_2, \dots : A \to \overline{\mathbb{R}}$ są mierzalne na zbiorze A i ciąg $\{f_n\}$ jest na zbiorze A zbieżny do funkcji f, to funkcja graniczna jest mierzalna na zbiorze A.

Wyróżnimy teraz tzw. funkcje proste. Niech $(X, \mathcal{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną i niech $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ będą zbiorami parami rozłącznymi. Funkcję $f : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \to \mathbb{R}$ określoną równościami $f(x) = \lambda_i$, gdy $x \in A_i$, gdzie $i = 1, 2, \dots, n$ (czyli mającą skończony zbiór wartości) nazywamy <u>funkcją prostą</u>. Funkcję tę możemy wyrazić wzorem $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \chi_{A_i}(x)$ dla $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Łatwo zauważyć, że f jest funkcją mierzalną, bo zbiór $\{x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i : f(x) < a\}$ dla każdego ustalonego $a \in \mathbb{R}$ jest sumą co najwyżej skończonej liczby zbiorów mierzalnych A_i, a zatem jest zbiorem mierzalnym.

Funkcje proste pozwalają na aproksymowanie funkcji mierzalnych. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie Niech $(X, \mathcal{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną. Funkcja $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{f_n\}$ funkcji prostych $f_n : X \to \mathbb{R}$ takich, że $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ dla każdego $x \in X$.

Przypomnijmy, że pewien warunek jest spełniony prawie wszędzie na zbiorze A jeśli jest spełniony wszędzie na A poza zbiorem miary zero. Na przykład, funkcje $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ są równe prawie wszędzie (piszemy: $f(x) = g(x)$ p.w. na A), gdy $\mu(\{x\in A : f(x) \neq g(x)\}) = 0$. Nierówność $f(x) \geq g(x)$ jest spełniona prawie wszędzie na zbiorze A, gdy $\mu(\{x \in A : f(x) < g(x)\}) = 0$.
Możemy również mówić o zbieżności prawie wszędzie.
Niech $(X, \mathcal{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną. Mówimy, że ciąg funkcji $\{f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}\}$ jest zbieżny prawie wszędzie do funkcji $f: A \to \mathbb{R}$ na zbiorze $A \in \mathcal{M}$, gdy zbiór $\{x\in A : f_n(x) \not\to f(x)\} \in \mathcal{M}$ i jego miara jest równa zero.

Przykład Niech $f_n : [0,1] \to [0,1]$, $f_n(x) = x^n$ dla $n = 0,1,2\ldots$ Wtedy $f_n(x) \to 0$ dla $x \in [0,1)$ i $f_n(1) \to 1$. Zatem $f_n(x) \to 0$ prawie wszędzie w $[0,1]$ w sensie miary Jordana (oraz miary Lebesgue'a), bo $m(\{1\}) = m(\{x\in[0,1] : f_n(x) \not\to 0\}) = 0$.

Można również rozpatrywać zbieżność według miary.
Niech $(X, \mathcal{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną. Ciąg $\{f_n\}$ funkcji mierzalnych i prawie wszędzie skończonych $f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$, gdzie $A \in \mathcal{M}$ nazywamy zbieżnym według miary do funkcji mierzalnej $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x\in A : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

Zbieżność $f_n \to f$ według miary μ oznaczamy: $f_n \xrightarrow{\mu} f$.
Gdy μ jest miarą prawdopodobieństwa (prawdopodobieństwem) to o "zbieżności według miary" mówimy o "zbieżności według prawdopodobieństwa".
Oczywiście jeżeli ciąg $\{f_n\}$ funkcji mierzalnych, gdzie $f_n : A \to \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{M}$, jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f: A \to \mathbb{R}$, to $f_n \xrightarrow{\mu} f$ w zbiorze A.

z pojęć i terminologii używanej w teorii miary korzysta wiele działów matematyki.

Przykład

W 1933 r. N. Kołmogorow zakotwiczył rachunek prawdopodobieństwa w teorii miary. Miarę μ taką, że $\mu(\Omega) = 1$ nazywamy **miarą probabilistyczną** (lub unormowaną). Na ogół zamiast zapisu $(X, \mathcal{M}, \mu)$, w rachunku prawdopodobieństwa piszemy (Ω, Σ, P) i taką przestrzeń mierzalną nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**. Przyjmujemy tam, że każdą funkcję $P : \Sigma \to \mathbb{R}$, która spełnia warunki:

1°. $P(\Omega) = 1$,

2°. $P(A) \geq 0$ dla każdego $A \in \Sigma$,

3°. jeżeli $A_1, A_2, \ldots \in \Sigma$ i $A_i \cap A_j = \phi$ dla $i \neq j$, to
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

nazywamy **miarą prawdopodobieństwa**.

Elementy $\omega \in \Omega$ nazywamy zdarzeniami elementarnymi, a zbiory $A \in \Sigma$ zdarzeniami losowymi. Dopełnienie $A' = \Omega \setminus A$ to zdarzenie przeciwne do A. Gdy $A, B \in \Sigma$ i $A \cap B = \phi$, to mówimy, że zdarzenia losowe A i B wykluczają się.

W teorii prawdopodobieństwa funkcje mierzalne nazywamy zmiennymi losowymi. Zamiast oznaczać funkcje literami $f, g, \ldots$ oznaczamy je dużymi literami $X, Y, \ldots$ pisząc $X(\omega), Y(\omega), \ldots$, gdzie $\omega \in \Omega$. Prowadzi to do przyjęcia definicji:

funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy **zmienną losową**,

gdy dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zbiór $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \Sigma$.

Dla zmiennej losowej X, przy każdym $x \in \mathbb{R}$ określone jest prawdopodobieństwo $P(X < x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$. Dla $x \in \mathbb{R}$ funkcję $F(x) = P(X < x)$ nazywamy **dystrybuantą** lub **funkcją rozkładu zmiennej losowej X**.

Powiemy jeszcze kilka słów o zależnościach między "mierzalnością", a "ciągłością" dwóch są to pojęcia z różnych światów. Aby to zrobić musimy przyjąć, że w przestrzeni X dana jest struktura metryczna oraz wyróżnione jest jakieś σ-ciało zbiorów $\mathcal{M}$.

Twierdzenie Każda funkcja rzeczywista ciągła na zbiorze mierzalnym jest mierzalna (rozpatrujemy mierzalność w sensie Lebesgue'a).

Istotnie, niech $f: A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na zbiorze mierzalnym $A \in \mathcal{M}$. Pokażemy, że dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ zbiór $Z = \{x \in A : f(x) < a\}$ jest mierzalny. Jeśli $Z = \emptyset$, to oczywiście Z jest mierzalny. Załóżmy, że $x \in Z$. Wtedy z ciągłości funkcji f wynika, że istnieje otwarte otoczenie G_x punktu x takie, że $f(t) < a$ dla każdego $t \in G_x \cap A$. Zatem

$$Z = \bigcup_{x \in Z} (G_x \cap A) = \underbrace{\left(\bigcup_{x \in Z} G_x \right)}_{\text{zbiór mierzalny jako otwarty}} \cap A$$

i jako iloczyn zbiorów mierzalnych jest zbiorem mierzalnym.

Z tego twierdzenia wynika, że klasa zbiorów mierzalnych zawiera w sobie znaną nam wcześniej klasę funkcji ciągłych, a nawet jest od niej większa, bo należą do niej funkcje nieciągłe i to nieciągłe w każdym punkcie swojej dziedziny (np. funkcja charakterystyczna zbioru $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, funkcja $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ jest funkcją mierzalną w sensie Lebesgue'a). Ponadto, granice ciągów funkcji ciągłych już mogą nie być funkcjami ciągłymi, pozostają jednak funkcjami mierzalnymi.

Mierzalność pozwala nam ignorować (niekorzystne) zjawiska, które dzieją się na zbiorach miary zero.

Całka Lebesgue'a

Całkę Riemanna można stosować jedynie do funkcji rzeczywistej zmiennych rzeczywistych, które nie mają "za dużo" punktów nieciągłości. Jej konstrukcji nie daje się przenieść na przypadek, gdy pojęcie ciągłości funkcji traci sens.

Konstrukcja całki Lebesgue'a ma tę zaletę, że można ją stosować w przypadku funkcji rzeczywistych określonych w różnych przestrzeniach.

W tej prezentacji będziemy używać wyłącznie miary Lebesgue'a, więc stosowane terminy "zbiór mierzalny", "funkcja mierzalna" oznaczać będą wyłącznie mierzalność w sensie Lebesgue'a.

Konstrukcja

Etap 1 Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ będą zbiorami parami rozłącznymi i $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Jeżeli $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \chi_{A_i}(x)$, $x \in A$, ($\lambda_i \in \mathbb{R}$) jest funkcją prostą, to całkę Lebesgue'a z tej funkcji określamy wzorem:

$$\int_A f \, dm_L = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot m_L(A_i).$$

Gdy $\lambda_i = 0$ i $m_L(A_i) = +\infty$, to przyjmujemy, że $\lambda_i \cdot m_L(A_i) = 0$

Przykład Dla funkcji $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0 & \text{dla } x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ całka

$\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) \, dm_L = 0$. Jednocześnie całka Riemanna $\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) \, dx$ nie istnieje.

Etap 2 Jeżeli $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ jest funkcją mierzalną nieujemną, zaś $\{f_i\}$ dowolnym ciągiem niemalejącym funkcji prostych zbieżnym na A do funkcji f (takie ciągi zawsze istnieją!), to:

$$\int_A f \, dm_L = \lim_{i\to\infty} \int_A f_i \, dm_L$$

Definicja ta jest niezależna od wyboru ciągu $\{f_i\}$, bo prawdziwe jest twierdzenie: jeśli $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ są ciągami niemalejącymi funkcji prostych, zbieżnymi do tej samej funkcji na zbiorze A, to

$$\lim_{i\to\infty}\int_A f_i\,dm_L = \lim_{i\to\infty}\int_A g_i\,dm_L .$$

Etap 3 Jeżeli $f: A \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją mierzalną, to wyróżniamy nieujemne funkcje: część nieujemną $f^+ = \max\{f,0\}$ oraz część niedodatnią $f_+ = \max\{-f,0\}$. Wtedy $f = f^+ - f_+$ i definiujemy całkę Lebesgue'a z funkcji mierzalnej wzorem

$$\int_A f\,dm_L = \int_A f^+\,dm_L - \int_A f_-\,dm_L,$$

gdy działanie po prawej stronie ma sens.

Definicja Jeżeli całka $\int_A f\,dm_L$ istnieje i jest skończona, to funkcję mierzalną $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ nazywamy całkowalną w sensie Lebesgue'a. (Całka z danej funkcji mierzalnej istnieje, gdy przynajmniej jedna z całek $\int_A f^+$, $\int_A f_+$ jest skończona.)

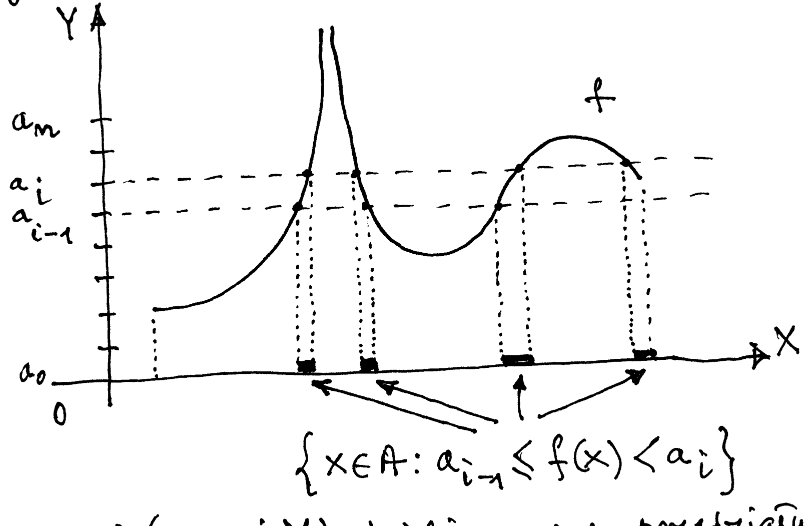
Opisany wyżej proces konstrukcji całki można stosować dla miar innych niż miara Lebesgue'a.

W obliczaniu wartości całki Lebesgue'a decydujące znaczenie ma etap 1 więc procedurę możemy opisać następująco.

Niech $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie funkcją mierzalną i nieujemną na A. Niech M oznacza zbiór wszystkich ciągów skończonych $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$ takich, że $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Sumę

$$S_M = \sum_{i=1}^{m-1} a_{i-1}\cdot m_L\big(\{x\in A : a_{i-1} \le f(x) < a_i\}\big) + a_m m_L\big(\{x\in A : a_m \le f(x)\}\big)$$

nazywamy sumą całkową Lebesgue'a.



Zbiór wartości (na osi Y) dzielimy na przedziały częściowe i wybraną wartość z każdego przedziału (u nas najmniejszą) mnożymy przez miarę x-ów, dla których $f(x)$ należy do podprzedziału.

Jeżeli liczba $\sup_{\Pi} S_n$, po wszystkich możliwych ciągach skończonych Π jest skończona, to nazywamy ją <u>całką Lebesgue'a</u> funkcji f na zbiorze A, a funkcję f całkowalną w sensie Lebesgue'a.

Użyteczność całki Lebesgue'a pokazują jej własności.

I) Jeżeli $c \in \mathbb{R}$ jest dowolnie ustaloną liczbą rzeczywistą, to z istnienia którejkolwiek z całek $\int_A f$, $\int_A cf$ wynika istnienie drugiej oraz wzór: $\int_A cf = c \cdot \int_A f$, $A \in \mathcal{M}$.

II) Jeżeli funkcje f, g są całkowalne na $A \in \mathcal{M}$, to $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$.

III) Jeżeli f jest całkowalna na $A \in \mathcal{M}$, to $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$.

Stąd wynika, że na zbiorze $A \in \mathcal{M}$, f jest całkowalna $\Leftrightarrow$ $|f|$ jest całkowalna.

Istotnie, jeśli $|f|$ jest całkowalna, to $\int_A |f| < +\infty$, ale wtedy z III) $\left| \int_A f \right| < +\infty$, czyli f jest całkowalna.

Jeśli f jest całkowalna, to $\int_A f^+ < +\infty$ i $\int_A f_+ < +\infty$, czyli

$$\int_A |f| = \int_A (f^+ + f_+) = \int_A f^+ + \int_A f_+ < +\infty .$$

IV) Jeżeli f jest prawie wszędzie nieujemna i całkowalna, a ponadto $\int_A f = 0$, to $f(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in A$ (nawet, gdy $m_L(A) > 0$).

V) Jeżeli f jest całkowalna na A i $m_L(A) = 0$, to $\int_A f = 0$.

VI) Jeżeli f, g są całkowalne na $A \in \mathcal{M}$ i $f = g$ prawie wszędzie na A, to $\int_A f = \int_A g$.

Na przykład, funkcja $\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x)$ różni się od funkcji $g(x) \equiv 0$ na przedziale $[0,1]$ na zbiorze miary zero, zatem $\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = \int_{[0,1]} 0 = 0$.

Ponadto, jeżeli f jest mierzalna na $A \cup B$ i $m_L(B) = 0$, to

$$\int_A f = \int_{A \cup B} f = \int_{A \setminus B} f .$$

VII) Jeżeli $\{A_n\}$ jest ciągiem zbiorów mierzalnych, parami rozłącznych ($A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$), zbiór $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ma miarę skończoną i f jest całkowalna na A, to

$$\int_A f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f .$$

VIII) Niech $A, B \in \mathcal{M}$ i $B \subset A$.

- Z istnienia całki $\int_A f$ wynika istnienie całki $\int_B f$.
- Jeżeli $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ jest nieujemna i całkowalna, to $\int_B f \leq \int_A f$.

IX) Jeżeli funkcje $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ są całkowalne $f \leq g$ prawie wszędzie na A i całki $\int_A f$, $\int_A g$ mają sens, to $\int_A f \leq \int_A g$.

X) Jeżeli $\{f_i : A \to \mathbb{R}\}$ jest ciągiem funkcji mierzalnych, wspólnie ograniczonych na zbiorze $A \in \mathcal{M}$ skończonej miary, zbieżnym do funkcji $f : A \to \mathbb{R}$, to $\lim_{i \to \infty} \int_A f_i = \int_A f$. (Jest to wynik Lebesgue'a.)

XI) Jeżeli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest mierzalna i ograniczona na zbiorze miary skończonej ($m_L(A) < +\infty$), to f jest całkowalna. W szczególności, funkcja ciągła $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym i ograniczonym jest całkowalna.

Dla funkcji rzeczywistych zmiennych rzeczywistych związek między całką Riemanna i Lebesgue'a opisuje następujące twierdzenie:

<u>Twierdzenie</u> Dowolna funkcja określona i ograniczona w przedziale domkniętym $f : \Delta \to \mathbb{R}$, $\Delta \subset \mathbb{R}^n$, jest całkowalna w sensie Riemanna w tym przedziale wtedy i tylko wtedy, gdy jej zbiór punktów nieciągłości ma miarę Lebesgue'a równą zero.

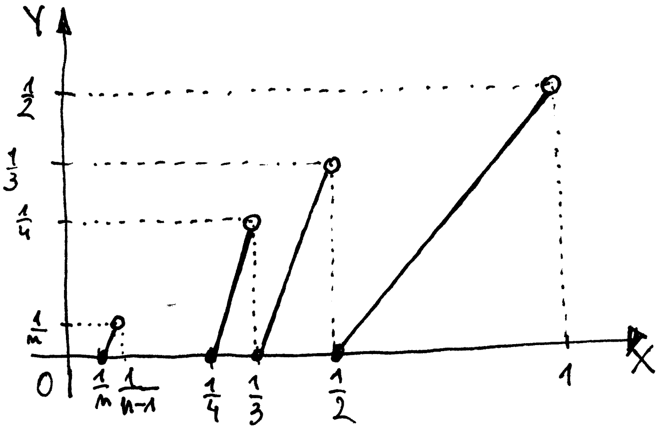
W szczególności: Każda funkcja całkowalna w sensie Riemanna w przedziale domkniętym jest w nim całkowalna w sensie Lebesgue'a i obie całki: Riemanna i Lebesgue'a są sobie równe.

Istotne znaczenie całki Lebesgue'a uzyskujemy dla tych funkcji, które są całkowalne w sensie Lebesgue'a i nie są całkowalne w sensie Riemanna.

Dla całek niewłaściwych nie ma tak jasnej zależności między całkami Riemanna oraz Lebesgue'a.

Działanie opisanych własności zilustrujemy na przykładzie.

<u>Przykład</u> Obliczyć całkę Lebesgue'a funkcji $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ danej wzorem $f(x)=n\left(x-\frac{1}{n+1}\right)$ dla $x\in\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$, $n=1,2,\ldots$



Rozważmy funkcję f obciętą do przedziału $A_n=\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$, tj.
$$g_n=f_{|A_n}\quad\text{dla } n=1,2,\ldots$$
Funkcje g_n są mierzalne na A_n jako ciągłe dla każdego $n=1,2,\ldots$
Ponadto dla każdego $a\in\mathbb{R}$
$$\{x\in(0,1): f(x)<a\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x\in(0,1): g_n(x)<a\}.$$
Ponieważ każdy ze zbiorów $\{x\in(0,1): g_n(x)<a\}$ jest mierzalny (bo jest zbiorem pustym lub przedziałem), więc ich przeliczalna sumę też jest zbiorem mierzalnym. Funkcja f jest ograniczona, $f(x)\le 1$ dla $x\in(0,1)$, więc wobec XI) f jest całkowalna i korzystając z VII):
$$\int_{(0,1)} f\,dm_L=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\,dm_L=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} g_n\,dm_L .$$
Skoro,
$$\int_{A_n} g_n\,dm_L=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} g_n(x)\,dx=\left\{\begin{matrix}\text{obliczamy pole}\\ \text{odpowiedniego trójkąta}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{n+1}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1-n}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n(n+1)^2},$$
więc
$$\int_{(0,1)} f\,dm_L=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1-n}{n(n+1)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right]=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)\right)=$$
$$=1-\frac{\pi^2}{12},$$
gdzie wykorzystaliśmy wiadomości z teorii szeregów: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1$ oraz $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ (to wynik Eulera z XVIII wieku).

<u>Przykład</u> Niech $C\subset[0,1]$ będzie zbiorem Cantora. Obliczyć $\int_{[0,1]}\chi_{[0,1]\setminus C}\,dm_L$.

o ile w poprzednim przykładzie można było stosować całkę Riemanna poza zbiorem punktów nieciągłości (bo zbiór ten był przeliczalny i jako taki miary zero), to w tu skorzystamy z własności VI).
Funkcja $\chi_{[0,1]\setminus C}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x\in[0,1]\setminus C \\ 0 & \text{dla } x\in C\end{cases}$ i funkcja $g(x)\equiv 1$, $x\in[0,1]$

są równe prawie wszędzie, bo $m_L(\{x\in[0,1]: \chi_{[0,1]\setminus C}(x)\neq g(x)\}) = m_L(\{x\in[0,1] : x\in C\}) = 0$. Zatem,

$$\int_{[0,1]} \chi_{[0,1]\setminus C}(x)\, dm_L = \int_{[0,1]} 1\, dx = 1.$$

(Oczywiście funkcja $\chi_{[0,1]\setminus C}$ jest mierzalna, a jako ograniczona na zbiorze miary skończonej jest całkowalna.)

Podamy jeszcze twierdzenie G. Fubiniego, które orzeka, że całkę z funkcji wielu zmiennych $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ całkowalnej względem miary Lebesgue'a można obliczać całkując kolejno względem zmiennych x_k i miary Lebesgue'a, a kolejność całkowań nie ma wpływu na wynik.

Twierdzenie (Fubiniego, wersja 2-wymiarowa)
Jeżeli A i B są zbiorami mierzalnymi zawartymi w $\mathbb{R}$, $f: A\times B\to\mathbb{R}$ jest funkcją mierzalną i nieujemną lub całkowalną w sensie Lebesgue'a, to dla prawie każdego $x\in A$ funkcja $y\to f(x,y)$ jest mierzalna na zbiorze B, funkcja $x\to f(x,y)$ jest mierzalna i określona prawie wszędzie na zbiorze A i ma miejsce wzór:

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy = \int_A \left\{ \int_B f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_B \left\{ \int_A f(x,y)\,dx \right\} dy.$$

Jeśli $f(x,y)\equiv 1$ w $A\times B$, to $m_L(A\times B) = m_L(A)\cdot m_L(B)$.

Przykład Jeśli $\Delta = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2$, to

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x,y)\,dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_a^b f(x,y)\,dx \right\} dy$$

– jest to zamiana całki podwójnej na całki iterowane.

Przestrzenie liniowe

Dalsze rozważania ograniczymy do specjalnego typu przestrzeni. Niepusty zbiór X elementów $x, y, z, \dots$ nazywamy <u>przestrzenią liniową</u> (lub <u>wektorową</u>) jeśli dla każdych dwóch elementów $x, y \in X$ jednoznacznie określona jest suma tych elementów $x+y \in X$ i tak określone działanie spełnia warunki:

1) $x+y = y+x$ (przemienność),
2) $x+(y+z) = (x+y)+z$ (łączność),
3) istnieje zero $\Theta \in X$, że dla każdego $x \in X$, $x+\Theta = x$,
4) dla każdego $x \in X$ istnieje element $(-x)$ taki, że $x+(-x) = \Theta$.

Ponadto dla każdego $x \in X$ i każdej liczby $\alpha \in \mathbb{R}$ (lub $\mathbb{C}$) jednoznacznie określony jest element $\alpha x \in X$ i tak określone działanie ma własności:

1') $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
2') $1 \cdot x = x$,
3') $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$,
4') $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$.

Przestrzeń liniową nazywamy <u>rzeczywistą</u>, jeśli określone jest w niej mnożenie przez liczby rzeczywiste. Przestrzeń liniową nazywamy <u>zespoloną</u> jeśli określone jest w niej mnożenie przez liczby zespolone ($z = x+iy \in \mathbb{C}$).

<u>Przykłady</u>

1. Prosta rzeczywista $\mathbb{R}$ ze zwykłymi działaniami dodawania i mnożenia liczb jest przestrzenią liniową.

2. Zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ układów $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ z działaniami określonymi wzorami

$$x+y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n),$$

$$\alpha \cdot x = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

jest n-wymiarową przestrzenią liniową ($\Theta = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{n \text{ "zer"}}$ - element zerowy przestrzeni $\mathbb{R}^n$).

3. Przestrzeń $C[a,b]$ wszystkich funkcji ciągłych $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ z działaniami $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$

jest przestrzenią liniową.

4. Przestrzeń l^p ($1 \le p < \infty$) wszystkich ciągów liczbowych $x = (x_1, x_2, \dots)$ spełniających warunek $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, z działaniami

$$(x_1, x_2, \dots) + (y_1, y_2, \dots) = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \dots) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots),$$

jest przestrzenią liniową. Trzeba jednak wyjaśnić skąd wiadomo, że jeśli $x, y \in l^p$, to $x+y \in l^p$, czyli $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^p < \infty$.

Dzięki oczywistej nierówności $|x_i+y_i| \le 2 \cdot \max\{|x_i|, |y_i|\}$ prawdziwa jest nierówność $|x_i+y_i|^p \le 2^p \max\{|x_i|^p, |y_i|^p\} \le 2^p(|x_i|^p + |y_i|^p)$. Zatem jeśli $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ i $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p < \infty$, to $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^p < \infty$.

5. Przestrzeń c wszystkich ciągów $x = (x_1, x_2, \dots)$ zbieżnych z działaniami określonymi jak wyżej jest przestrzenią liniową. Podobnie przestrzeń c_0 wszystkich ciągów zbieżnych do zera jest przestrzenią liniową.

6. Przestrzeń $L^1(X, \mu)$ funkcji całkowalnych.
Niech $(X, \mathcal{M}, \mu)$ będzie przestrzenią mierzalną, gdzie μ jest miarą zupełną (tj. każdy podzbiór zbioru miary zero ma również miarę zero). Zbiór funkcji $f: X \to \mathbb{R}$ mierzalnych takich, że $\int_X |f| d\mu < \infty$, gdzie utożsamiamy funkcje $f = g$ prawie wszędzie, ma tę własność, że kombinacja liniowa $\alpha f + \beta g$ funkcji całkowalnych jest funkcją całkowalną. Rodzina takich funkcji jest więc przestrzenią liniową, którą oznaczamy jako $L^1(X, \mu)$.

7. Przestrzeń $L^2(X, \mu)$ funkcji całkowalnych z kwadratem.
Jak poprzednio rozpatrzymy funkcje rzeczywiste określone w przestrzeni X z miarą μ. Zakładamy, że funkcje są mierzalne i określone dla prawie każdego $x \in X$.
Funkcję $f: X \to \mathbb{R}$ nazywamy <u>całkowalną z kwadratem</u> w przestrzeni X, jeśli całka $\int_X f^2 d\mu < \infty$.
Przyjmijmy, że rozpatrujemy miarę Lebesgue'a. Wtedy
(a) Iloczyn dwóch funkcji całkowalnych z kwadratem jest funkcją całkowalną.
Wynika to z nierówności

$$|f(x) \cdot g(x)| \leq \frac{1}{2}\left\{ f^2(x) + g^2(x) \right\}$$

i własności miary Lebesgue'a. Przyjmując $g(x) \equiv 1$ otrzymujemy: każda funkcja całkowalna z kwadratem jest całkowalna!

(b) Suma dwóch funkcji całkowalnych z kwadratem jest też całkowalna z kwadratem.

Istotnie, mamy

$$\{ f(x) + g(x) \}^2 \leq f^2(x) + 2|f(x) \cdot g(x)| + g^2(x)$$

i każda z trzech funkcji, które są po prawej stronie jest całkowalna.

(c) Jeśli $f \in L^2(X,\mu)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, to $\alpha f \in L^2(X,\mu)$.

To konsekwencja zależności

$$\int_X [\alpha f]^2 d\mu = \alpha^2 \cdot \int_X f^2 d\mu < +\infty .$$

Dwa ostatnie warunki zapewniają, że liniowa kombinacja funkcji należących do przestrzeni $L^2(X,\mu)$ należy do przestrzeni $L^2(X,\mu)$ (oczywiście dodawanie funkcji, mnożenie ich przez liczby spełnia warunki przestrzeni liniowej), więc przestrzeń $L^2(X,\mu)$ funkcji całkowalnych z kwadratem jest przestrzenią liniową.

Strukturę algebraiczną (= przestrzeni liniowej) łatwo można "popsuć" ograniczając przestrzeń X lub niezbyt trafnie określając działanie dodawania lub mnożenia elementu przez liczbę. Na przykład, zbiór wielomianów stopnia drugiego $w(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$ nie jest przestrzenią liniową, bo zbiór ten nie zawiera zera, czyli funkcji $\Theta(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Elementy $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ przestrzeni liniowej nazywamy <u>liniowo niezależnymi</u>, jeśli $\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \right) \Rightarrow (\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0)$.

W przeciwnym wypadku elementy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liniowo zależne.

Nieskończony zbiór elementów $x_1, x_2, \ldots \in X$ przestrzeni liniowej jest liniowo niezależny, jeśli każdy jego skończony podzbiór jest zbiorem elementów liniowo niezależnych. Na przykład, w przestrzeni $C[a,b]$ elementy: $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$

są liniowo niezależne, bo żadna skończona ich ilość nie jest liniowo zależna.

Elementem zerowym w przestrzeni $C[a,b]$ jest funkcja $\Theta(x) \equiv 0$ tożsamościowo równa zero. Załóżmy, że dla pewnego $n \geq 1$,

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_n x^{n-1} + \alpha_{n+1} x^n = 0$$

dla każdego $x \in [a,b]$. Gdyby $\alpha_i \neq 0$ dla pewnego $i \geq 2$, wówczas niezerowy wielomian (stopnia $i-1$) miałby co najwyżej $i-1$ pierwiastków. Jednak na podstawie powyższej równości każda liczba $x \in [a,b]$ jest pierwiastkiem wielomianu, a tych liczb jest nieprzeliczalnie wiele. Sprzeczność, zatem $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha_{n+1} = 0$.

Definicja Jeśli w przestrzeni liniowej X istnieje n liniowo niezależnych elementów $e_1, e_2, \ldots, e_n$ takich, że każdy element $x \in X$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci kombinacji liniowej $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, to zbiór $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ nazywamy bazą przestrzeni, a przestrzeń X nazywamy n-wymiarową. Liczby $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, to współrzędne wektora x względem elementów bazy.

Jeśli przestrzeń X nie ma skończonej bazy, to X jest przestrzenią o nieskończonym wymiarze.

Przykład

1) W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ elementy

$$e_1 = (1,0,0,\ldots,0),$$
$$e_2 = (0,1,0,\ldots,0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$e_n = (0,0,0,\ldots,1),$$

mogą stanowić bazę przestrzeni: dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

$\mathbb{R}^n$ jest przestrzenią n-wymiarową. Piszemy, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

2) Nieskończony zbiór $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ elementów liniowo niezależnych w przestrzeni $C[a,b]$ oznacza, że przestrzeń liniowa $C[a,b]$ ma wymiar nieskończony. Piszemy wtedy, $\dim C[a,b] = \infty$.

3) Podobnie przestrzeń l^2 ciągów $x = (x_1, x_2, \ldots)$ sumowalnych z kwadratem $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\right)$ jest przestrzenią liniową,

nieskończonego wymiaru, bo elementy nieskończonej rodziny

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots),$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \dots),$$
$$e_3 = (0, 0, 1, \dots),$$
$$\dots\dots\dots$$

(jedynka na i-tej pozycji, a poza tym same zera)

mogą stanowić bazę przestrzeni: każdy punkt $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$, gdy $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$, ma przedstawienie

$$x = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i .$$

<u>Definicja</u> Zbiór $X_0 \subset X$ zawarty w przestrzeni liniowej nazywany <u>podprzestrzenią liniową</u>, gdy X_0 jest przestrzenią liniową, przy tych samych działaniach dodawania i mnożenia co w X. Inaczej mówiąc, gdy X_0 jest zamknięty ze względu na dodawanie i mnożenie przez liczbę ($\forall_{x,y \in X_0} \; x + y \in X_0$, $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_{x \in X_0} \; \alpha x \in X_0$).

<u>Przykład</u>

1) Jedynymi podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^2$ (płaszczyzny) są zbiory: $\{\Theta = (0,0)\}$, każda prosta przechodząca przez punkt $\Theta = (0,0)$, oraz $\mathbb{R}^2$. Innych podprzestrzeni liniowych w $\mathbb{R}^2$ nie ma.
2) Jedynymi podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$ (przestrzeni) są zbiory: $\{\Theta = (0,0,0)\}$, każda prosta przechodząca przez punkt $\Theta = (0,0,0)$, każda płaszczyzna przechodząca przez punkt $\Theta = (0,0,0)$, cała przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Innych podprzestrzeni liniowych w $\mathbb{R}^3$ nie ma.
3) Zbiór wszystkich ciągów zbieżnych (c), zbiór wszystkich ciągów zbieżnych do zera (c_0) są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni liniowej wszystkich ciągów ograniczonych.

Struktura przestrzeni liniowej pozwala na wyróżnienie pewnych obiektów (zbiorów) geometrycznych.

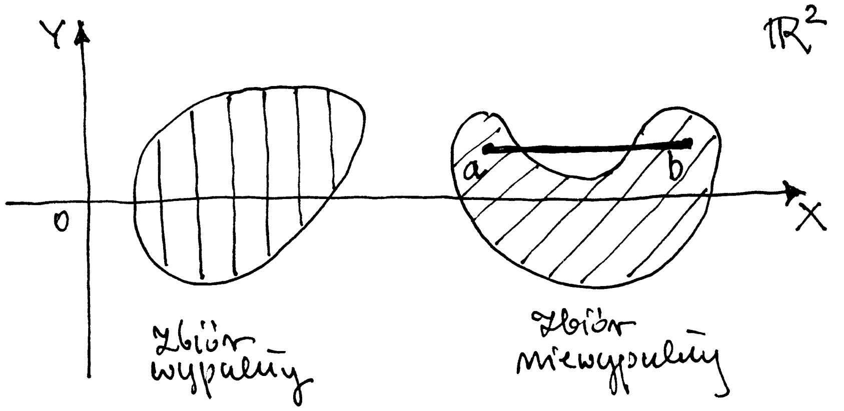
<u>Prostą</u> w przestrzeni liniowej X, przechodzącą przez punkty <u>$x_0, x_1 \in X$</u> $(x_0 \neq x_1)$ nazywamy zbiór $\{x \in X : x = x_0 + t x_1, \; t \in \mathbb{R}\}$.

Odcinkiem w przestrzeni liniowej X o końcach $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ nazywamy zbiór

$$[x_1, x_2] = \{ z \in X : z = t x_1 + (1-t) x_2 , \ 0 \leq t \leq 1 \}.$$

Podzbiór $A \subset X$ w przestrzeni liniowej nazywamy wypukłym, gdy zawiera każdy odcinek o końcach w A, czyli gdy

$$\forall_{a,b \in A} \ \forall_{0 \leq t \leq 1} \ (t \cdot a + (1-t) b) \in A .$$



Przykład W przestrzeni $C[a,b]$ zbiór

$$A = \{ f \in C[a,b] : \int_a^b |f(x)| dx \leq 1 \}$$

jest wypukły.

Istotnie, jeśli $f \in A$, to $\int_a^b |f(x)| dx \leq 1$, jeśli $g \in A$, to $\int_a^b |g(x)| dx \leq 1$. Trzeba sprawdzić, czy $tf + (1-t) g \in A$ dla $0 \leq t \leq 1$.

Ponieważ dla każdego $t \in [0,1]$,

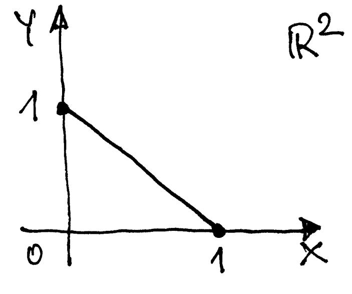
$$\int_a^b |t f(x) + (1-t) g(x)| dx \leq t \cdot \int_a^b |f(x)| dx + (1-t) \int_a^b |g(x)| dx \leq$$

$$\leq t \cdot 1 + (1-t) \cdot 1 = 1,$$

więc A jest zbiorem wypukłym.

Najmniejszy zbiór wypukły zawierający zbiór A (iloczyn wszystkich zbiorów wypukłych zawierających A) nazywamy powłoką wypukłą zbioru A lub konweksem zbioru A i oznaczamy $\operatorname{conv}(A)$.

Przykład Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ dla zbioru $A = \{(0,1), (1,0)\}$, $\operatorname{conv}(A) = \{$ odcinek łączący punkty $(0,1)$ i $(1,0) \}$.



Przestrzenie unormowane - I

W dalszym ciągu będziemy rozważać przestrzenie, które poza strukturą algebraiczną (liniowością) mają również określoną strukturę topologiczną. Inspiracją do określenia normy było pojęcie długości wektora.

Definicja Normą na przestrzeni liniowej X nazywamy funkcję $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$, która dla dowolnych $x, y \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$, spełnia warunki:

1) $\|x\| = 0 \iff x = \Theta$ (jest zerem przestrzeni X),
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
3) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (jest to nierówność trójkąta).

Przestrzenią unormowaną nazywamy parę $(X, \|\cdot\|)$, gdzie X jest przestrzenią liniową, zaś $\|\cdot\|$ jest normą na X.
Używając terminu " przestrzeń unormowana " zawsze będziemy mieli na myśli przestrzeń liniową.

Uwaga. Ponieważ w każdej przestrzeni liniowej istnieje baza (Hamela), więc korzystając z tego pojęcia, w każdej przestrzeni liniowej można określić jakąś normę, wtedy: $x_n \to x \iff \|x_n - x\| \to 0$.

Uwaga Na tej samej przestrzeni liniowej można określić różne normy. Zależy to od naszych umiejętności i celu jaki chcemy osiągnąć.

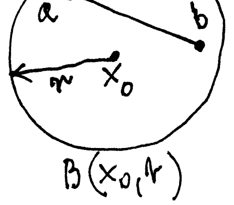
- Jednak każda norma jest funkcją ciągłą.

Ponieważ, $\|x\| = \|x-y+y\| \le \|x-y\| + \|y\|$,
$\|y\| = \|y-x+x\| \le \|y-x\| + \|x\|$,

więc $\left(-\|x-y\| \le \|x\| - \|y\| \le \|x-y\|\right) \iff \big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x-y\|$.

Jeśli $x_n \to x_0$, tzn $\|x_n - x_0\| \to 0$, gdy $n \to \infty$ dla $\{x_n\} \subset X$, $x_0 \in X$, to z ostatniej nierówności $\big|\|x_n\| - \|x_0\|\big| \le \|x_n - x_0\|$ wynika, że $\|x_n\| \xrightarrow{n} \|x_0\|$.

- W przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$ każda kula, czyli zbiór $B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| \le r\}$, gdzie $r \ge 0$, jest zbiorem wypukłym.



$B(x_0, r)$

Istotnie, jeśli $a, b \in B(x_0, r)$, to $\|a - x_0\| \le r$ i $\|b - x_0\| \le r$. Wtedy dla punktu $z = ta + (1-t)b \in X$, mamy

$$\|z - x_0\| = \|t(a-x_0) + (1-t)(b-x_0)\| \le$$
$$\le \|t(a-x_0)\| + \|(1-t)(b-x_0)\| \le$$
$$\le t \cdot r + (1-t) \cdot r = r, \quad 0 \le t \le 1.$$

Kule w przestrzeni metrycznej nie muszą być zbiorami wypukłymi!

- Każda norma generuje metrykę. Mianowicie funkcja
$$d(x,y) = \|x-y\|, \quad x,y \in X,$$
jest metryką na przestrzeni liniowej X, a więc każda przestrzeń unormowana jest przestrzenią metryczną.
- W metryce generowanej przez normę działania algebraiczne (dodawanie, mnożenie przez liczbę) są ciągłe.

Jeśli $d(x_n, x_0) \to 0$, $d(y_n \to y_0)$ i $t_n \to t_0$,

to $d(x_n+y_n, x_0+y_0) \to 0$ i $d(t_n x_n, t_0 x_0) \to 0$, gdy $n \to \infty$.

Wynika to wprost z definicji metryki i nierówności:
$$\|(x_n+y_n)-(x_0+y_0)\| \leq \|x_n-x_0\| + \|y_n-y_0\| \xrightarrow{n} 0,$$
$$\|t_n x_n - t_0 x_0\| = \|t_n x_n - t_n x_0 + t_n x_0 - t_0 x_0\| \leq$$
$$\leq |t_n| \cdot \|x_n - x_0\| + |t_n - t_0| \cdot \|x_0\| \xrightarrow{n} 0.$$

Nie jest to prawdą dla każdej metryki w przestrzeni liniowej X. Zatem metryka generowana przez normę ma szczególne własności.

Przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią metryczną z metryką $d(x,y) = \|x-y\|$. Można więc mówić o zupełności lub jej braku dla takich przestrzeni.
Przestrzeń unormowaną zupełną w metryce generowanej przez normę nazywamy <u>przestrzenią Banacha</u>.

<u>Przykłady</u> (przestrzeni liniowych, które <u>nie są zupełne</u>)

1) Niech $W[0,1]$ oznacza przestrzeń wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych traktowanych jako funkcje określone na przedziale $[0,1]$ z normą $\|w\| = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |w(x)|$.

Nie jest to przestrzeń zupełna, bo ciąg wielomianów $\{w_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\}_{n \geq 0}$, jako zbieżny do funkcji $f(x) = e^x$, jest ciągiem Cauchy'ego. Ponieważ funkcja $f(x) = e^x$, $x \in [0,1]$, nie jest wielomianem, więc w przestrzeni rozważanych wielomianów ciąg $\{w_n(x)\}$

nie jest zbieżny (mimo, że spełnia warunek Cauchy'ego).
Gdyby funkcja $f(x) = e^x$ była wielomianem stopnia $n \geq 1$, to jej pochodna byłaby wielomianem stopnia $(n-1)$, czyli $f'(x) \neq e^x$, i mamy sprzeczność, bo $(e^x)' = e^x$.

2) Niech X oznacza przestrzeń nieskończonych ciągów postaci
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, 0, \dots), \quad k = 1, 2, \dots,$$
których prawie wszystkie wyrazy są równe 0 (= tylko skończona liczba wyrazów jest $\neq 0$). Norma elementu x jest równa $\|x\| = \max\limits_{1 \leq j \leq k} |x_j|$.

Weźmy w tej przestrzeni ciąg $\{x_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots)\}_{n \geq 1}$

Ponieważ dla $n \geq m$,
$$\|x_n - x_m\| = \|(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots, \tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{m+1}, \dots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \dots) -$$
$$- (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots, \tfrac{1}{m}, 0, 0, \dots)\| =$$
$$= \max\left\{\tfrac{1}{m+1}, \tfrac{1}{m+2}, \dots, \tfrac{1}{n}\right\} \longrightarrow 0, \text{ gdy } m, n \to \infty,$$

więc ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Jednak ciąg $\{x_n\}$ nie jest zbieżny w przestrzeni X, bo jedyny element $\bar{x}$, do którego mógłby być zbieżny jest postaci $\bar{x} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$ ale $\bar{x} \notin X$, bo wszystkie jego wyrazy są $\neq 0$.

Z wykładu 1 wiemy, że zupełność przestrzeni zależy od rozważanej metryki (normy). W przestrzeni $C[0,1]$ każdy ze wzorów
$$\|f\|_1 = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|, \quad \|f\|_2 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$
określa normę. Jednak,
- przestrzeń unormowana $(C[0,1], \|f\|_1)$ jest przestrzenią zupełną,
- przestrzeń unormowana $(C[0,1], \|f\|_2)$ nie jest zupełna.

Zupełność przestrzeni wymaga umiejętności operowania ciągami Cauchy'ego, więc teraz przypomnimy podstawowe ustalenia z tym związane. Ciąg $\{x_n\}$ elementów przestrzeni metrycznej (X, d) nazywamy <u>ciągiem Cauchy'ego</u>, jeśli $d(x_n, x_m) \to 0$, gdy $n, m \to \infty$ (= gdy "końcówka" ciągu może mieć dowolnie małą średnicę). Ciąg Cauchy'ego może być zbieżny lub nie. Jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X, d) jest zbieżny, to przestrzeń nazywamy <u>zupełną</u>.

- Każdy ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej (X, d) jest ciągiem Cauchy'ego.
  Istotnie, jeśli $x_n \to x$, to $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) \to 0$, gdy $n, m \to \infty$.

Przykład Ciąg $\{x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\}_{n \geq 1}$ w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ nie jest ciągiem Cauchy'ego:

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ składników}} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

- Każdy ciąg Cauchy'ego w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ jest ograniczony.
  Niech $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ będzie ciągiem Cauchy'ego. Istnieje wtedy wskaźnik N taki, że dla $n, m \geq N$, $|x_n - x_m| < 1$. Stąd $|x_n - x_N| < 1$ dla $n \geq N$. Ponieważ $|x_n| = |x_n - x_N + x_N| \leq$ $\leq |x_n - x_N| + |x_N|$, więc $|x_n| \leq |x_N| + 1$ dla $n \geq N$. Przyjmując $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$ otrzymujemy, $|x_n| \leq M$ dla wszystkich $n = 1, 2, \dots$
- Każdy ciąg ograniczony w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ zawiera podciąg zbieżny (to twierdzenie Bolzano-Weierstrassa).
  Powyższe informacje pozwalają na wskazanie bardzo ważnego przykładu przestrzeni zupełnej.

Przykład Przestrzeń euklidesowa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ jest zupełna.
Niech $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ będzie ciągiem Cauchy'ego. Ciąg ten jako ograniczony zawiera podciąg zbieżny $x_{m_n} \to g$, gdy $n \to \infty$. Ponieważ $m_n \geq n$, więc dla dostatecznie dużych indeksów

$$|x_n - g| \leq |x_n - x_{m_n}| + |x_{m_n} - g| \to 0,$$

gdy $n \to \infty$, bo $|x_n - x_{m_n}| \to 0$, przy $n \to \infty$ jako, że $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Uwaga Zupełność przestrzeni łatwo można zepsuć np. usuwając w powyższym przykładzie jeden punkt: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nie jest zupełna, bo ciąg $\{x_n = \frac{1}{n}\}_{n \geq 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego, ale w zbiorze $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nie ma on granicy, więc nie jest w tym zbiorze zbieżny.

Uwaga Zupełność nie jest własnością dziedziczną — podzbiory przestrzeni zupełnej mogą nie być przestrzeniami zupełnymi. Na przykład, przestrzeń (zbiór) liczb wymiernych $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ nie jest przestrzenią zupełną: ciąg liczb wymiernych $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, jest ciągiem Cauchy'ego (jako ciąg $x_n \to \sqrt{2}$), który w przestrzeni $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ nie jest zbieżny, bo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Można pokazać, że podprzestrzeń (Y, d) przestrzeni zupełnej (X, d) jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy $Y \subset X$ jest domknięty w X.

Wykazanie zupełności niektórych ważnych przestrzeni jest dość kłopotliwe.

<u>Przykład</u> (F. Riesz, 1910)

(A) Niech L^p $(p \geq 1)$ będzie zbiorem funkcji mierzalnych $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ (sumowalnych z p-tą potęgą) takich, że $\int_0^1 |x|^p d\mu < \infty$, gdzie całkę rozumiemy w sensie Lebesgue'a.

(B) Niech l^p $(p \geq 1)$ będzie zbiorem ciągów liczbowych rzeczywistych $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ takich, że $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$.

Po pierwsze, pokażemy, że jeśli $x, y \in L^p$, to $x + y \in L^p$. Ponieważ $\alpha x \in L^p$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x \in L^p$, to w ten sposób pokażemy, że <u>L^p jest przestrzenią liniową</u>, $p \geq 1$.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$, $|a+b| \leq |a| + |b|$.
Jeśli $|a| > |b|$, to $|a+b| \leq 2 \cdot |a|$, zatem

$$|a+b|^p \leq 2^p \cdot |a|^p \leq 2^p \left(|a|^p + |b|^p\right).$$

Jeśli $|a| \leq |b|$, to $|a+b| \leq 2 \cdot |b|$, więc

$$|a+b|^p \leq 2^p \cdot |b|^p \leq 2^p \left(|a|^p + |b|^p\right).$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a, b \in \mathbb{R}$, $|a+b|^p \leq 2^p \left(|a|^p + |b|^p\right)$, gdzie $p \geq 1$.

Skoro, $x, y \in L^p$, to $\int_0^1 |x|^p d\mu < \infty$ i $\int_0^1 |y|^p d\mu < \infty$. Korzystając z wykazanej nierówności

$$\int_0^1 |x+y|^p d\mu \leq 2^p \left(\int_0^1 |x|^p d\mu + \int_0^1 |y|^p d\mu \right) < \infty,$$

więc $x + y \in L^p$.

Podobnie jeśli $x \in l^p$, $y \in l^p$, to $x + y \in l^p$, $p \geq 1$. Istotnie, jeśli $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$ i $\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p < \infty$, to korzystając z wykazanej nierówności

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \leq 2^p \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right) < \infty,$$

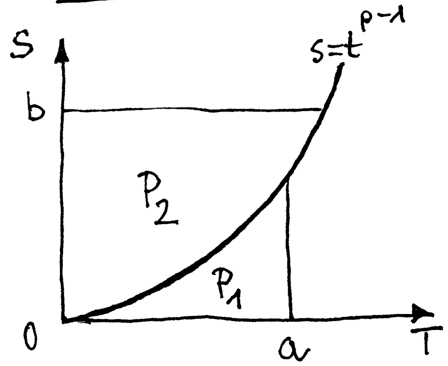
więc $x + y \in l^p$. Również $\alpha \cdot x \in l^p$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$. Zatem <u>l^p jest przestrzenią</u>

liniowo, $p \geq 1$.

Po drugie, wskazując
w przestrzeni L^p normę $\|x\| = \left(\int_0^1 |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$,
w przestrzeni l^p normę $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$,

tworzymy przestrzenie unormowane. Wymaga to pokazania, że tak określone funkcje spełniają warunki normy. Wyzwaniem jest uzasadnienie nierówności trójkąta: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dla $p \geq 1$.

Nierówność Höldera



Niech $p > 1$ i $q > 1$ spełniają równość $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Funkcja $s = t^{p-1}$ określona dla $t \in [0, \infty)$ ma funkcję odwrotną $t = s^{1/(p-1)} = s^{q-1}$, bo $\frac{1}{p-1} = q-1$.

Dla dowolnych liczb $a, b > 0$ całki

$$P_1 = \int_0^a t^{p-1} dt = \frac{a^p}{p}, \quad P_2 = \int_0^b s^{q-1} ds = \frac{b^q}{q}$$

przedstawiają pola krzywoliniowych "trójkątów" (patrz rysunek). Ponieważ $P_1 + P_2 \geq ab$ (równość ma miejsce, gdy $b = a^{p-1}$), więc

$$(*) \qquad \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$

Niech funkcje $x \in L^p$, $y \in L^q$ będą takie, że $\int_0^1 |x|^p d\mu > 0$ i $\int_0^1 |y|^q d\mu > 0$.

Przyjmijmy

$$a = \frac{|x(t)|}{\left(\int_0^1 |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{|y(t)|}{\left(\int_0^1 |y|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Podstawiając te wartości do nierówności $(*)$ otrzymujemy

$$\frac{|x(t)| \cdot |y(t)|}{\left(\int_0^1 |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 |y|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{|x(t)|^p}{\int_0^1 |x|^p d\mu}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{|y(t)|^q}{\int_0^1 |y|^q d\mu}\right).$$

Całkując obustronnie nierówności, mamy

$$\frac{\int_0^1 |x| \cdot |y| \, d\mu}{\left(\int_0^1 |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 |y|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

skąd

$$\int_0^1 |x\cdot y|\,d\mu \leq \left(\int_0^1 |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 |y|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Nierówność ta pozostaje prawdziwa, gdy funkcja $x(t) = 0$ prawie wszędzie lub funkcja $y(t) = 0$ prawie wszędzie.
Otrzymana nierówność jest nierównością Höldera dla całek.

Niech teraz $x \neq \Theta$ i $y \neq \Theta$ (x i y nie są ciągami zerowymi). Przyjmując

$$a = \frac{|x_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{oraz} \quad b = \frac{|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$$

z nierówności (*) otrzymujemy

$$\frac{|x_i|\cdot|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|x_i|^p}{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{|y_i|^q}{\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q}\right).$$

Sumując te nierówności stronami od $i=1$ do ∞, mamy

$$\frac{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|\cdot|y_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

skąd

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Nierówność ta pozostaje prawdziwa, gdy x lub y są ciągami zerowymi. Otrzymana nierówność jest nierównością Höldera dla sum.

Przestrzenie unormowane - II

Wykazaliśmy już nierówność Höldera dla całek oraz dla sum:

- Jeżeli $x \in L^p$, $y \in L^q$, gdzie $p>1$, $q>1$ są tak dobrane, że $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, to
$$\int_0^1 |x\cdot y|\,d\mu \leq \left(\int_0^1 |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_0^1 |y|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$
- Jeżeli $x=(x_1,x_2,\dots)\in l^p$, $y=(y_1,y_2,\dots)\in l^q$, gdzie $p>1$, $q>1$ są tak dobrane, że $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, to
$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Nierówność Minkowskiego

Rozpoczniemy od obserwacji: jeśli $p>1$, $q>1$ są tak dobrane, że $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, to z faktu, że $z\in L^p$ wynika, że $|z|^{p-1}\in L^q$.
Jest tak, gdyż $\left(|z|^{p-1}\right)^q = |z|^{(p-1)\cdot q} = |z|^p$ (bo $(p-1)q=p$), skąd wynika, że funkcja $\left(|z|^{p-1}\right)^q$ jest sumowalna.
Niech $x,y\in L^p$ będą takimi funkcjami, że $\int_0^1 |x+y|^p d\mu > 0$.
Wtedy
$$\int_0^1 |x+y|^p d\mu = \int_0^1 |x+y|^{p-1}\cdot|x+y|\,d\mu \leq$$
$$\leq \int_0^1 |x+y|^{p-1}\cdot|x|\,d\mu + \int_0^1 |x+y|^{p-1}\cdot|y|\,d\mu \leq \left\{\begin{matrix}\text{stosujemy}\\ \text{nierówność}\\ \text{Höldera}\end{matrix}\right\}$$
$$\leq \left(\int_0^1 |x+y|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_0^1 |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} +$$
$$+\left(\int_0^1 |x+y|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_0^1 |y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \{(p-1)q=p\}$$
$$= \left(\int_0^1 |x+y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_0^1 |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} +$$
$$+\left(\int_0^1 |x+y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_0^1 |y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$=\left(\int_0^1 |x+y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left\{\left(\int_0^1 |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right\}.$$
Dzieląc obie strony tej nierówności przez $\left(\int_0^1 |x+y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$, zauważając, że $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, otrzymujemy

$$\left(\int_0^1 |x+y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^1 |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 |y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Łatwo widzimy, że nierówność ta pozostaje prawdziwa dla $p=1$ oraz jest prawdziwa, gdy funkcje $x, y \in L^p$ spełniają warunek $\int_0^1 |x+y|^p d\mu = 0$. Zatem powyższa nierówność jest prawdziwa dla dowolnych $x, y \in L^p$, gdzie $1 \leq p < \infty$. Jest to nierówność Minkowskiego dla całek. Jest ona identyczna z nierównością trójkąta w przestrzeniach L^p, $1 \leq p < \infty$,

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \text{gdzie} \quad \|x\| = \left(\int_0^1 |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

W konsekwencji $(L^p, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną.

Analogiczne rozumowanie przeprowadzimy w przestrzeniach ciągów sumowalnych z odpowiednią potęgą. Jeśli $p>1$, $q>1$ są tak dobrane, że $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, to z faktu, że $x=(x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$ wynika, że $\overline{x} = (|x_1|^{p-1}, |x_2|^{p-1}, \dots) \in \ell^q$, tzn. $\overline{x}$ jest ciągiem sumowalnym z q-tą potęgą. Jest tak, bo $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{(p-1)q} = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$.

Niech $x, y \in \ell^p$ będą takimi ciągami, że $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^p > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^p &= \sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^{p-1} \cdot |x_i+y_i| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^{p-1} \cdot |x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^{p-1} \cdot |y_i| \leq \left\{\begin{matrix}\text{stosujemy} \\ \text{nierówność} \\ \text{Höldera}\end{matrix}\right\} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^{(p-1)\cdot q}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \{(p-1)q = p\} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \\
&\quad + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \\
&= \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}.
\end{aligned}$$

Dzieląc obie strony tej nierówności przez $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{q}}$, pamiętając, że $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, otrzymujemy

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nierówność ta pozostaje prawdziwa dla $p=1$ oraz w przypadku, gdy ciągi $x,y \in \ell^p$ są takie, że $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p = 0$.

Zatem wyżej podana nierówność jest prawdziwa dla dowolnych $x,y \in \ell^p$, gdzie $1 \leq p < \infty$. Jest to nierówność Minkowskiego dla sum. Jest ona identyczna z nierównością trójkąta w przestrzeniach $\ell^p, 1 \leq p < \infty$,

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \text{ gdzie } \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

W konsekwencji $(\ell^p, \|\cdot\|)$, $1\leq p<\infty$, jest przestrzenią unormowaną.

W trzecim kroku wykażemy zupełność przestrzeni L^p, ℓ^p, $1 \leq p < \infty$. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem funkcji w przestrzeni $(L^p, \|\cdot\|)$ takich, że $x_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ i niech ciąg $\{x_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Zatem dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie N, że $\left(\int_{[0,1]}|x_n - x_m|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$.

Przyjmijmy $\varepsilon_k = \frac{1}{2^{kp+k}}$ dla $k=1,2,\ldots$ Wtedy z ciągu $\{x_n\}$ można wybrać podciąg $\{x_{n_k}\}_{k\geq 1}$ taki, że $\left(\int_{[0,1]}|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon_k$.

Wówczas miara zbioru $A_k = \{t \in [0,1] : |x_{n_k}(t) - x_{n_{k+1}}(t)| > \frac{1}{2^k}\}$ spełnia warunek $\mu(A_k) \leq \frac{1}{2^k}$.

Otóż dla funkcji mierzalnej $f : S \to [0,\infty)$ i $\varepsilon > 0$ prawdziwa jest nierówność $\mu(\{s \in S : f(s) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_S f\,d\mu$. Wynika to z prostej obserwacji. Jeśli $A = \{s \in S : f(s) \geq \varepsilon\}$, to

$$\varepsilon \cdot \chi_A(s) \leq f(s) \quad \text{dla } s \in A,$$

a stąd

$$\varepsilon \cdot \mu(A) = \varepsilon \cdot \int_A \chi_A\,d\mu \leq \int_A f\,d\mu \leq \int_S f\,d\mu.$$

Zatem dla zbioru A_k,

$$\frac{1}{2^k}\cdot\mu(A_k) \leq \int_{A_k}|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}|\,d\mu \leq \left\{\begin{matrix}\text{nierówność}\\ \text{Höldera}\end{matrix}\right\}$$

$$\leq \left(\int_{A_k}|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{A_k} 1\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2^{kp+k}} \cdot \mu(A_k)^{\frac{1}{q}},$$

czyli

$$\frac{1}{2^k}\cdot\mu(A_k)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{2^{kp+k}}\cdot\mu(A_k)^{\frac{1}{q}}, \text{ skąd } \mu(A_k) \leq \frac{1}{2^k},$$

oznaczmy $B_k = \bigcap_{i=k}^{\infty} \left([0,1] \setminus A_i \right) = [0,1] \setminus \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$. Wówczas

$$\mu(B_k) \geq \mu([0,1]) - \sum_{i=k}^{\infty} \mu(A_i) \geq 1 - \frac{1}{2^{k-1}}$$

oraz

$$|x_{n_{m+1}}(t) - x_{n_m}(t)| \leq \frac{1}{2^m}$$

dla wszystkich $m > k$ i dla $t \in B_k$. Zatem ciąg $\{x_{n_m}\}$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze B_k.

Oczywiście, $B_k \subset B_{k+1}$ i $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \mu([0,1]) = 1$. Wynika stąd, że ciąg liczbowy $\{x_{n_m}(t)\}$ jest dla prawie wszystkich $t \in [0,1]$ (dla $t \in \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$) ciągiem Cauchy'ego, jest więc prawie zbieżny do pewnej funkcji mierzalnej $x(t)$. Ponieważ ciąg $\{x_{n_m}\}$ jako podciąg ciągu spełniającego warunek Cauchy'ego, sam spełnia warunek Cauchy'ego więc dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje wskaźnik $\bar{N}$, że dla $m, \bar{m} > \bar{N}$ $\left(\int_{[0,1]} |x_{n_m} - x_{n_{\bar{m}}}|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$. Ponieważ funkcja podcałkowa jest nieujemna, więc tym bardziej $\left(\int_{B_k} |x_{n_m} - x_{n_{\bar{m}}}|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$ dla każdego k.

Przechodząc do granicy z $\bar{m} \to \infty$, uzyskujemy $\left(\int_{B_k} |x_{n_m} - x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$.

(Do granicy $\bar{m} \to \infty$ można przejść pod znakiem całki, bo ciąg $\{x_{n_m}\}$ jest na zbiorze B_k jednostajnie zbieżny.) Dodatkowo, ponieważ ostatnia nierówność jest prawdziwa dla każdego k, a rodzina B_k jest wstępująca ($B_k \subset B_{k+1}$), więc $\left(\int_{\bigcup B_k} |x_{n_m} - x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$, czyli

$$\left(\int_{[0,1]} |x_{n_m} - x|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \text{ skąd wynika, że } (x_{n_m} - x) \in L^p.$$

Wobec tego $x = (x - x_{n_m}) + x_{n_m} \in L^p$ (patrz krok pierwszy). Dowolność wyboru ε w ostatniej nierówności implikuje, że ciąg $\{x_{n_m}\}$ jest zbieżny do x (gdy $m \to \infty$). Pozostaje wykazać, że $x_n \to x$, ale to wynika z oszacowań

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_m}\| + \|x_{n_m} - x\| \longrightarrow 0, \text{ gdy } n \to \infty$$

(oczywiście $n_m \geq m$, więc wtedy również $n_m \to \infty$). Zatem przestrzeń L^p, $1 < p < \infty$, jest zupełna.

Dla przestrzeni L^1 (z $p=1$) dowód przebiega analogicznie, z zastrzeżeniem, że oszacowanie miary zbioru $A_k = \{t \in [0,1] : |x_{n_k}(t) - x_{n_{k+1}}(t)| > \frac{1}{2^k}\}$ przebiega następująco:

$$\frac{1}{2^k}\mu(A_k) \leq \int_{A_k} |x_{n_k} - x_{n_{k+1}}| d\mu \leq \int_{[0,1]} |x_{n_k} - x_{n_{k+1}}| d\mu < \frac{1}{2^{k+k}},$$

skąd $\mu(A_k) < \frac{1}{2^k}$.

Przestrzenie L^p, $1 \leq p < \infty$, są zupełne.

Wykażemy zupełność przestrzeni ciągowych ℓ^p, $1 \leq p < \infty$.

Niech $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots) \in \ell^p$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Bierzemy pod uwagę ciąg $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset \ell^p$, który jest ciągiem Cauchy'ego, czyli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie N, że

$$(*) \qquad \|x_n - x_m\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad \text{dla } n, m \geq N.$$

Musimy pokazać, że istnieje $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots) \in \ell^p$ taki, że $\lim_{n\to\infty} \|x_n - \bar{x}\| = 0$. Ponieważ $\lim_{n,m\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$, więc $\lim_{n,m\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p = 0$. Ponieważ wszystkie składniki sumy są nieujemne, więc dla każdego ustalonego wskaźnika i, $\lim_{n,m\to\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| = 0$, tzn. ciąg liczb rzeczywistych $\{x_i^{(n)}\}_{n \geq 1}$ spełnia warunek Cauchy'ego. Ponieważ przestrzeń $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ jest zupełna, więc istnieje element $\bar{x}_i \in \mathbb{R}$ taki, że $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = \bar{x}_i$. Przyjmujemy $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots)$. Musimy pokazać, że $\bar{x} \in \ell^p$.

Z oszacowania $(*)$ wynika, że dla każdego k prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p \quad \text{dla } n, m \geq N.$$

Przechodząc do granicy przy $m \to \infty$, otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|^p \leq \varepsilon^p \quad \text{dla } n \geq N.$$

Następnie przechodząc do granicy przy $k \to \infty$, mamy

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - \bar{x}_i|^p \leq \varepsilon^p \quad \text{dla } n \geq N,$$

co oznacza, że $(\bar{x} - x_n) \in \ell^p$ dla $n = 1, 2, \ldots$ Ponieważ $x_n \in \ell^p$, więc z liniowości przestrzeni ℓ^p, $\bar{x} = (\bar{x} - x_n) + x_n \in \ell^p$.

Ponadto z ostatniej nierówności wynika, że $\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(n)}-\bar{x}_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$ dla $n \geqslant N$, czyli $\lim_{n\to\infty}\|x_n-\bar{x}\| = 0$, a to oznacza zupełność przestrzeni ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$.

Uwaga Przedstawione wyżej rozumowanie (nie całkiem banalne) bardzo często ukryte jest w niepozornie wyglądającym/przyjmowanym założeniu: "Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią Banacha ... ".

Wśród przestrzeni metrycznych (X,d) wyróżniamy przestrzenie ośrodkowe. Zwróćmy uwagę, że pojęcie zbioru domkniętego w przestrzeni metrycznej możemy opisać przy pomocy ciągów: zbiór $A \subset X$ nazywamy zbiorem domkniętym, jeśli należą do niego granice wszystkich ciągów zbieżnych $\{x_n\} \subset A$. Domknięciem $\bar{A}$ zbioru A nazywamy najmniejszy zbiór domknięty zawierający zbiór A (= iloczyn mnogościowy wszystkich zbiorów domkniętych zawierających zbiór A). Zbiór $A \subset X$ jest gęsty w przestrzeni X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element przestrzeni X jest granicą ciągu elementów zbioru A (inaczej, gdy $\bar{A} = X$).

Definicja Przestrzeń metryczną (X,d) nazywamy ośrodkową, jeżeli X zawiera podzbiór gęsty i przeliczalny, zwany ośrodkiem. W danej przestrzeni może istnieć wiele różnych ośrodków.

Przykład

1) Przestrzenie euklidesowe $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^2, d)$, $(\mathbb{R}^3, d)$ i ogólnie $(\mathbb{R}^n, d)$ są przestrzeniami ośrodkowymi. Zbiorem przeliczalnym i gęstym jest np. $\mathbb{Q}^n$, $n \in \mathbb{N}$.
2) Przestrzenie ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$, są ośrodkowe. Zbiorem przeliczalnym i gęstym w tej przestrzeni jest zbiór M złożony ze wszystkich ciągów o wyrazach wymiernych i takich, że prawie wszystkie wyrazy są równe 0. Niech $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell^p$ i $\varepsilon > 0$ będzie dowolnie ustalone. Dobieramy N takie, że $\sum_{i=N}^{\infty}|x_i|^p < \frac{1}{2}\varepsilon^p$ (jest to możliwe, bo szereg $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p < \infty$ jest zbieżny). Ponieważ $\mathbb{Q}$ jest zbiorem gęstym w $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ więc istnieje $y = (r_1, r_2, \dots, r_{N-1}, 0, 0, \dots) \in M$ taki, że $\sum_{i=1}^{N-1}|x_i - r_i|^p < \frac{1}{2}\varepsilon^p$. Wówczas, $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i - r_i|^p = \sum_{i=1}^{N-1}|x_i - r_i|^p + \sum_{i=N}^{\infty}|x_i|^p < \frac{1}{2}\varepsilon^p + \frac{1}{2}\varepsilon^p = \varepsilon^p$, czyli $\|x-y\| < \varepsilon$, a to oznacza, że $\bar{M} = \ell^p$. ℓ^p, $1 \leqslant p < \infty$, jest przestrzenią ośrodkową.

Przestrzenie unitarne

W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ do badania prostopadłości niezerowych wektorów, do określania ich długości bardzo pomocny był iloczyn skalarny. Wykorzystamy tę ideę w przestrzeniach liniowych (wektoro-wych). Aby nie komplikować sytuacji rozważać będziemy jedynie przestrzenie rzeczywiste.

Definicja Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$. Iloczynem skalarnym nazywamy przekształcenie $\langle\cdot,\cdot\rangle : X^2 \to \mathbb{R}$ spełniające warunki: dla $x,y,z \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $\langle x,x\rangle > 0$ dla $x \neq \Theta$,
2) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$,
3) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$,
4) $\langle \alpha\cdot x,y\rangle = \alpha\cdot\langle x,y\rangle$.

Przestrzeń $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ z określonym w niej iloczynem skalarnym nazywamy przestrzenią unitarną.

Odnotujmy kilka własności iloczynu skalarnego, które są bezpośrednimi konsekwencjami wyżej przyjętych aksjomatów.

a) $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$.
Istotnie, $\langle x,y+z\rangle = \langle y+z,x\rangle = \langle y,x\rangle + \langle z,x\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$.

b) $\langle x,\alpha y\rangle = \alpha\cdot\langle x,y\rangle$.
Istotnie, $\langle x,\alpha y\rangle = \langle \alpha y,x\rangle = \alpha\cdot\langle y,x\rangle = \alpha\cdot\langle x,y\rangle$.

c) $\langle \Theta,x\rangle = \langle x,\Theta\rangle = 0$.
Ponieważ $\Theta = 0\cdot y$, $y\neq\Theta$, więc $\langle\Theta,x\rangle = \langle 0\cdot y,x\rangle = 0\cdot\langle y,x\rangle = 0$.
Podobnie, $\langle x,\Theta\rangle = \langle x,y\cdot 0\rangle = \langle 0\cdot y,x\rangle = 0\cdot\langle y,x\rangle = 0$.

d) Nierówność Schwarza: $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$.

Dla każdej liczby $t\in\mathbb{R}$, $\langle tx+y,tx+y\rangle \geq 0$, tj.

$\langle tx+y,tx+y\rangle = t^2\cdot\langle x,x\rangle + t\cdot 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \geq 0$, więc wyróżnik tego trójmianu kwadratowego (ze względu na zmienną t) "b^2-4ac" ≤ 0, tj. ma miejsce nierówność

$$4|\langle x,y\rangle|^2 - 4\langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle \leq 0,$$

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle.$$

Przykład

1) Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym określonym następująco

$\langle x,y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot y_i$ dla $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ oraz $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$

jest przestrzenią unitarną. Sprawdzenie aksjomatów iloczynu skalarnego jest natychmiastowe.

2) Przestrzeń ℓ^2 ciągów rzeczywistych $x=(x_1,x_2,\dots)$ sumowalnych z kwadratem, tj. takich, że $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty$, z iloczynem skalarnym

$$\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i \quad \text{dla} \quad x=(x_1,x_2,\dots)\in\ell^2,\ y=(y_1,y_2,\dots)\in\ell^2$$

jest przestrzenią unitarną. Zbieżność szeregu $\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i$ gwarantuje nierówność Höldera: jeśli $x=(x_1,x_2,\dots)$, $y=(y_1,y_2,\dots)\in\ell^2$, to $\sum_{i=1}^{\infty}|x_iy_i|\leq\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\right)^{\frac12}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2\right)^{\frac12}<\infty$. Sprawdzenie spełnienia aksjomatów iloczynu skalarnego jest natychmiastowe.

3) Podobnie przestrzeń L^2 funkcji mierzalnych $x:[0,1]\to\mathbb{R}$ całkowalnych z kwadratem, tj. $\int_{[0,1]}|x|^2d\mu<\infty$, z iloczynem skalarnym

$$\langle x,y\rangle=\int_{[0,1]}x\cdot y\,d\mu, \quad \text{dla} \quad x,y\in L^2,$$

jest przestrzenią unitarną (zbieżność całki gwarantuje nierówność Höldera). Spełnienie aksjomatów iloczynu skalarnego wynika z własności operatora całki.

4) Z własności operatora całki wynika również, że w przestrzeni $C[0,1]$, funkcji ciągłych $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, możemy określić iloczyn skalarny wzorem $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt$. Uzyskujemy w ten sposób przestrzeń unitarną.

Iloczyn skalarny ma przyjemną własność – umożliwia zdefiniowanie (określenie) normy. W ten sposób każda przestrzeń unitarna jest przestrzenią unormowaną!

Istotnie, niech $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią unitarną. Normę elementu $x\in X$ definiujemy wzorem

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

Oczywiście, $\|x\|\geq 0$ dla $x\in X$ oraz $\|x\|=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x=\Theta$. Dla dowolnego $x\in X$ oraz $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\|\alpha\cdot x\|=\sqrt{\langle\alpha x,\alpha x\rangle}=\sqrt{|\alpha|^2\langle x,x\rangle}=|\alpha|\cdot\|x\|.$$

W dowodzie nierówności trójkąta wykorzystamy nierówność Schwarza w postaci:

$$|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\cdot\|y\|.$$

$$\|x+y\| = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} = \sqrt{\langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle} =$$
$$= \sqrt{\|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2} \leq$$
$$\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2} \leq \left\{ \begin{matrix} \text{nierówność} \\ \text{Schwarza} \end{matrix} \right\}$$
$$\leq \sqrt{\|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2} = \|x\| + \|y\|,$$

co kończy uzasadnienie.

Przykład

W przestrzeni unitarnej $\mathbb{R}^n$, gdzie $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, mamy normę $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$.

W przestrzeni unitarnej ℓ^2, gdzie $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$, mamy normę $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$.

W przestrzeni unitarnej L^2, gdzie $\langle x,y\rangle = \int_{[0,1]} x\cdot y\,d\mu$, mamy normę $\|x\| = \sqrt{\int_{[0,1]} |x|^2 d\mu}$.

W przestrzeni unitarnej $C[0,1]$, gdzie $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, mamy normę $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$.

Sprawdzenie, że funkcje $\|\cdot\|$ spełniają nierówność trójkąta wymaga (= jest równoważne) wykazania nierówności Minkowskiego dla sum lub całek, np. ponieważ z nierówności Minkowskiego

$$\sqrt{\int_0^1 |f+g|^2} \leq \sqrt{\int_0^1 |f|^2} + \sqrt{\int_0^1 |g|^2},$$

mamy

$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad \text{dla } f,g \in C[0,1].$$

Uwagi wymaga również sprawdzenie warunku: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$.
Jeżeli $f(t) \equiv 0$ dla $t \in [0,1]$, to $\|f\| = 0$.
Pokażemy, że jeśli $\langle f,f\rangle = 0$, to $f \equiv 0$, w przestrzeni $C[0,1]$.
Gdyby było inaczej, to istniałoby $t_0 \in [0,1]$ takie, że $f^2(t_0) > 0$.
Skoro f^2 jest funkcją ciągłą, to istnieje wtedy $\delta > 0$ takie, że dla $t \in [0,1] \cap [t_0-\delta, t_0+\delta]$, $f^2(t) \geq \frac{1}{2}f^2(t_0) > 0$.
Gdy $t \in [t_0-\delta, t_0] \subset [0,1]$, to

$$\langle f,f\rangle = \int_0^1 f^2(t)\,dt \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0} f^2(t)\,dt \geq \int_{t_0-\delta}^{t_0} \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot f^2(t_0)}_{\text{liczba}}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot f^2(t_0)\cdot\delta > 0, \text{ sprzeczność.}$$

Podobnie, gdy $t \in [t_0, t_0+\delta] \subset [0,1]$, to

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 f^2(t)\,dt \geqslant \int_{t_0}^{t_0+\delta} f^2(t)\,dt \geqslant \int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{1}{2}\cdot f^2(t_0)\,dt =$$

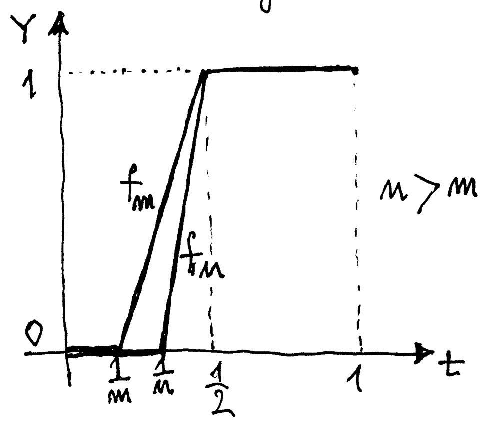
$$= \frac{1}{2}\cdot f^2(t_0)\cdot\delta > 0, \text{ sprzeczność.}$$

Zatem jeśli $\langle f, f\rangle = 0$, to (w przestrzeni $C[0,1]$ z wyżej określonym iloczynem skalarnym) $f(t) \equiv 0$.

W ten sposób (przy pomocy iloczynu skalarnego) mamy w przestrzeni $C[0,1]$ określoną kolejną normę $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt}$, różną od dwóch podanych wcześniej (patrz wykład 7).

Przykład Przestrzeń $C[0,1]$ z normą $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt}$ nie jest przestrzenią zupełną.

Wykorzystamy funkcje $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ określone na wykładzie 1.



$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ n\left(t - \frac{1}{2}\right) + 1 & \text{dla } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{dla } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

gdzie $n \geqslant 2$. Wtedy dla $n > m$,

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)|^2\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}} |f_n(t) - f_m(t)|^2\,dt \leqslant \frac{1}{2m} \longrightarrow 0, \text{ gdy } m \to \infty,$$

więc $\{f_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Przypuśćmy, że istnieje $f \in C[0,1]$ taka, że $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^2\,dt = 0$, czyli $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} |f_n(t) - f(t)|^2 = 0$

(Korzystamy tu z twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki). Stąd zaś wynika, że $f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{dla } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$

co przeczy założeniu, że $f \in C[0,1]$.

Definicja Przestrzeń unitarną, która jest zupełna w normie (metryce) generowanej przez iloczyn skalarny nazywamy przestrzenią Hilberta.

Przestrzeniami Hilberta są więc przestrzenie $\mathbb{R}^n$ z normą $\|x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, przestrzeń ciągów rzeczywistych sumowalnych z kwadratem l^2 z normą $\|x = (x_1, x_2, \dots)\| =$

$= \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}$, przestrzeń unitarna $L^2[0,1]$ funkcji całko-
-walnych z kwadratem z normą $\|x\| = \sqrt{\int_{[0,1]} |x|^2 d\mu}$,
a przestrzeń unitarna $C[0,1]$ z normą $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$
nie jest przestrzenią Hilberta.

Zatem klasa przestrzeni unitarnych jest istotnie szersza od klasy przestrzeni Hilberta.

Odnotujmy jeszcze, że w przestrzeni unitarnej $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ iloczyn skalarny $\langle\cdot,\cdot\rangle : X^2 \to \mathbb{R}$ jest przekształceniem ciągłym.

Istotnie, załóżmy, że $x_n \to x$ i $y_n \to y$ w normie generowanej przez iloczyn skalarny. Wtedy, korzystając z nie-
-równości Schwarza,

$$| \langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle | = | \langle x_n - x, y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle | \leq$$
$$\leq | \langle x_n - x, y_n\rangle | + | \langle x, y_n - y\rangle | \leq \left\{ \begin{matrix} \text{nierówność} \\ \text{Schwarza} \end{matrix} \right\}$$
$$\leq \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0, \text{ gdy } n \to \infty,$$

bo ciąg $\{\|y_n\|\}$ jako zbieżny jest ograniczony.

Omawiana tematyka sugeruje następujące ważne pytanie: jakie warunki musi spełniać norma, aby istniał iloczyn skalarny, który w danej przestrzeni, tę normę generuje?

Odpowiedź na to pytanie podaje twierdzenie:

<u>Twierdzenie</u> Przestrzeń unormowana $(X, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unitarną wtedy i tylko wtedy, gdy norma spełnia identyczność równoległoboku:

$$\forall_{x,y \in X} \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Jeżeli $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią unitarną, to norma $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ spełnia warunek równoległoboku:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle =$$
$$= \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$= \{\text{redukcja}\} = 2\left(\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle\right) = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

W drugą stronę można wykazać, że przekształcenie dane wzorem

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

spełnia wszystkie aksjomaty iloczynu skalarnego.

Przykład

1) Dla liczb rzeczywistych $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2+|y|^2)$. Zatem w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ $(n=1,2,\dots)$ norma opisana wzorem $\|x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$ spełnia identyczność równoległoboku. Sumując stronami równości: $|x_i+y_i|^2+|x_i-y_i|^2 = 2(|x_i|^2+|y_i|^2)$ od $i=1$ do $i=n$, otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^2+\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2 = 2\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2+\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)$$

czyli

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

Jeśli w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ normy opiszemy wzorem $\|x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, gdzie $1 \leq p < \infty$ i $p \neq 2$, to normy te nie spełniają identyczności równoległoboku.

Dla wektorów $a=(1,1,0,0,\dots,0)$, $b=(1,-1,0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, mamy

$a+b=(2,0,0,\dots,0)$, $a-b=(0,2,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$,

zatem, $\|a\|_p = \|b\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$, $\|a+b\|_p = \|a-b\|_p = 2$. Wtedy dla $p \neq 2$, $2^2+2^2 \neq 2\left(2^{\frac{2}{p}}+2^{\frac{2}{p}}\right)$.

Dokładnie takie same rozważania pokażą, że w przestrzeni l^p, $1 \leq p < \infty$, z normą $\|x=(x_1,x_2,\dots)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, jedynie przestrzeń $\left(l^2, \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2}\right)$ jest przestrzenią unitarną.

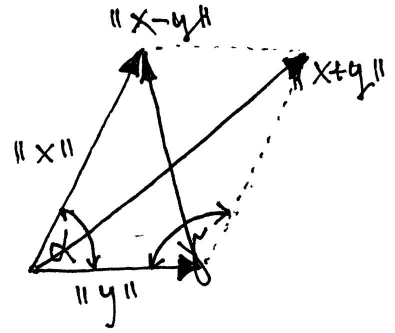
2) W przestrzeni $C[0,1]$ z normą $\|f\| = \max\{|f(t)| : 0 \leq t \leq 1\}$ rozważmy funkcje $g, h \in C[0,1]$ dane wzorami:

$$g(t)=\begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -2t+1 & \text{dla } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}, \quad h(t)=\begin{cases} -2t+1 & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{dla } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Wtedy, $\|g\| = \|h\| = \|h+g\| = \|h-g\| = 1$, więc identyczność równoległoboku nie jest spełniona. Przestrzeń $(C[0,1], \|\cdot\|-\max)$ nie jest przestrzenią unitarną – nie jest więc przestrzenią Hilberta. Jednak jest przestrzenią Banacha.

Oczywiście każda przestrzeń Hilberta jest przestrzenią Banacha, ale ostatni przykład pokazuje, że klasa przestrzeni Hilberta jest istotnie węższa niż klasa przestrzeni Banacha.

Uwaga. Nazwa "identyczność równoległoboku" ma związek z elementami geometrii na płaszczyźnie, gdy $\|x+y\|$ i $\|x-y\|$ są długościami przekątnych równoległoboku, o bokach długości $\|x\|$ i $\|y\|$.



$$2\alpha + 2\gamma = 2\pi$$
$$\gamma = \pi - \alpha$$

Dla równoległoboku na płaszczyźnie euklidesowej $\mathbb{R}^2$ suma kwadratów długości przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów długości jego boków.

Z twierdzenia cosinusów:

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\cdot\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\alpha\,,$$
$$\|x+y\|^2 = \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos(\pi-\alpha) =$$
$$= \|y\|^2 + \|x\|^2 + 2\cdot\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\alpha\,,$$

i po zsumowaniu stronami:

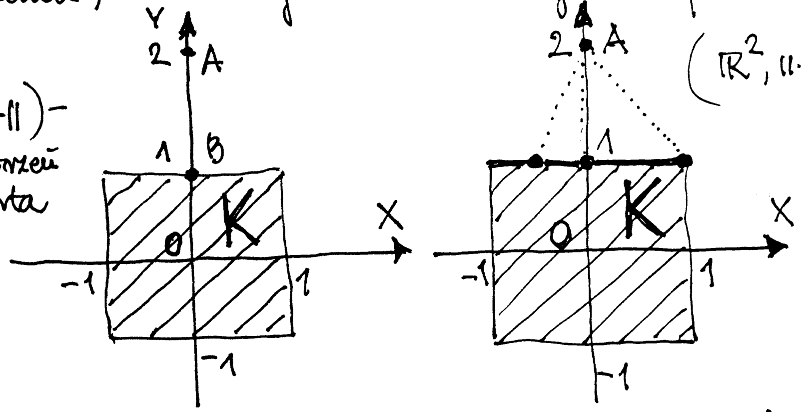
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Ortogonalność

W przestrzeniach unitarnych obok struktury liniowej oraz metrycznej, ze sprawą "prostopadłości" możemy wyróżnić również strukturę geometryczną. Daje to możliwość uzyskania bardziej precyzyjnych rezultatów niż w przestrzeniach unormowanych (przypomnijmy, każda przestrzeń unitarna jest przestrzenią unormowaną).

Przykład W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ z normą $\|(x,y)\| = \sqrt{|x|^2+|y|^2}$ (jest to przestrzeń unitarna) odległość punktu A od zbioru K (rysunek) realizuje dokładnie jeden punkt B.

$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ - przestrzeń Hilberta



$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_M)$

wszystkie punkty "górnej" krawędzi kwadratu K są odległe o 1 od punktu A

Przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z normą $\|(x,y)\|_M = \max\{|x|,|y|\}$ nie jest przestrzenią unitarną. Dla $\bar{x}=(1,1)$ i $\bar{y}=(1,-1)$ wielkości

$$\|\bar{x}-\bar{y}\|^2+\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = 2^2+2^2 \quad \text{i} \quad 2\left(\|\bar{x}\|^2+\|\bar{y}\|^2\right) = 2(1^2+1^2)$$

są różne. W tej przestrzeni istnieje nieskończenie wiele punktów realizujących odległość punktu A od zbioru K.

Definicja Niech $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ będzie przestrzenią unitarną. Elementy $x, y \in X$ nazywamy ortogonalnymi (prostopadłymi), jeśli $\langle x,y\rangle = 0$. Piszemy wtedy $x \perp y$.
Niepusty zbiór $A \subset X$ nazywamy układem ortogonalnym, jeśli każde dwa różne elementy ze zbioru A są ortogonalne.

Przykład

1) W przestrzeni l^2 z iloczynem skalarnym $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$, gdzie $x=(x_1,x_2,\dots)$, $y=(y_1,y_2,\dots)\in l^2$, zbiór wektorów

$$\begin{cases} e_1 = (1,0,0,\dots), \\ e_2 = (0,1,0,\dots), \dots, \text{"1" na } i\text{-tym miejscu}, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

stanowi układ ortogonalny: $\forall_{i\neq j} \ \langle e_i,e_j\rangle = 0$. Podobnie w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ baza standardowa jest układem ortogonalnym.

2) W przestrzeni funkcji ciągłych $C[0,2\pi]$ z iloczynem skalarnym $\langle f,g\rangle = \int_{[0,2\pi]} f(t)\cdot g(t)\,dt$ zbiór funkcji

$$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t,\ \cos 3t,\ \sin 3t,\ \dots\quad,\ t\in[0,2\pi]$$

stanowi układ ortogonalny (zbiór funkcji wzajemnie prostopadłych). Dla każdego $n=0,1,2,\dots$ definiujemy $C_n(t)=\cos nt$, $S_n(t)=\sin nt$, gdzie $t\in[0,2\pi]$.

Jeżeli $m=0$, to

$$\langle C_n, S_m\rangle = \int_0^{2\pi}\cos nt\cdot\sin mt\,dt = \int_0^{2\pi}(0\cdot\cos nt)\,dt = 0 .$$

Jeżeli $n=m$, to

$$\langle C_n, S_m\rangle = \int_0^{2\pi}\cos nt\cdot\sin mt\,dt = \int_0^{2\pi}\cos nt\cdot\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2nt\,dt = -\frac{1}{4}\Big[\cos 2nt\Big]_0^{2\pi} = -\frac{1}{4}\cdot 0 = 0 .$$

Jeżeli $n\neq m$, to

$$\langle C_n, S_m\rangle = \int_0^{2\pi}\cos nt\cdot\sin mt\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\Big[\sin(m+n)t+\sin(m-n)t\Big]dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m+n}\Big[\cos(m+n)t\Big]_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m-n}\Big[\cos(m-n)t\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m+n}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m-n}\cdot 0 = 0 .$$

Ponieważ iloczyn skalarny jest przemienny ($\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$) w przestrzeniach nad ciałem liczb rzeczywistych, więc powyższe wzory obejmują wszystkie możliwe przypadki.

Prostą konsekwencją przestrzeni unitarnej jest:

<u>Twierdzenie</u> (Pitagorasa)

Jeżeli w przestrzeni unitarnej $x\perp y$, to $\|x\pm y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$.

Istotnie,

$$\|x\pm y\|^2 = \langle x\pm y, x\pm y\rangle = \langle x,x\rangle \underbrace{\pm\langle y,x\rangle \pm \langle x,y\rangle}_{=0.} + \langle y,y\rangle = \|x\|^2+\|y\|^2.$$

Kolejne twierdzenie ujawnia pożyteczną własność układów ortogonalnych.

<u>Twierdzenie</u> W przestrzeni unitarnej ortogonalny zbiór wektorów niezerowych jest zbiorem liniowo niezależnym.

Niech $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ będzie skończonym podzbiorem danego zbioru ortogonalnego. Przypuśćmy, że $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\dots+\alpha_nx_n=\Theta$ dla pewnego układu liczb $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$. Wtedy dla $k\in\{1,\dots,n\}$

$$\langle x_k, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \rangle = \alpha_k \cdot \langle x_k, x_k \rangle ,$$

gdyż $\langle \alpha_k, x_j \rangle = 0$ dla $j \neq k$. Ponieważ $\langle x_k, x_k \rangle \neq 0$, więc $\alpha_k = 0$ dla każdego k. Oznacza to, że wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liniowo niezależne.

Uwaga Z ostatniej obserwacji wynika, że przestrzenie unitarne rozpatrywane wyżej: l^2, $C[0,2\pi]$ są nieskończonego wymiaru.

Uwaga Jeśli A jest układem ortogonalnym w przestrzeni unitarnej X i ośrodkowej, to zbiór A jest skończony lub przeliczalny.

Wprowadzone pojęcia pozwalają na dyskusję następującego problemu optymalizacji: mając dany wektor $x \in X$ w przestrzeni unitarnej oraz jej podprzestrzeń $M \subset X$, znaleźć wektor $m \in M$, który jest najbliższy wektorowi x, tzn. dla którego norma $\|x - m\|$ osiąga wartość najmniejszą.

Rozwiązanie tego problemu wymaga odpowiedzi na trzy pytania:

1) czy istnieje wektor $m \in M$, który minimalizuje wartość wyrażenia $\|x - m\|$?
2) czy rozwiązanie jest jednoznaczne?
3) który wektor jest rozwiązaniem problemu lub jak można rozwiązanie wyznaczyć?

W przestrzeni Hilberta odpowiedzi dostarcza następujące twierdzenie:

Twierdzenie (o rzucie ortogonalnym)
Jeżeli H jest przestrzenią Hilberta, a podprzestrzeń $M \subset H$ jest domknięta, to każdemu wektorowi $x \in H$ odpowiada jeden i tylko jeden wektor $m_0 \in M$ taki, że $\|x - m_0\| \leqslant \|x - m\|$ dla wszystkich $m \in M$.
Ponadto warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby $m_0 \in M$ był jedynym wektorem minimalizującym, jest aby wektor $(x - m_0)$ był ortogonalny do M, tzn. $(x - m_0) \perp m$ dla każdego $m \in M$.

Dowód przebiega następująco.
Istnienie. Jeżeli $x \in M$, to $m_0 = x$.
Załóżmy, że $x \notin M$ i niech $d = \inf_{m \in M} \|x - m\|$. Z określenia kresu dolnego istnieje ciąg $\{m_i\} \subset M$ taki, że $\|x - m_i\| \to d$, gdy $i \to \infty$. Z reguły równoległoboku, mamy

$$\|(x-m_i)+(m_j-x)\|^2+\|(x-m_i)-(m_j-x)\|^2 = $$
$$= 2\left(\|x-m_i\|^2+\|m_j-x\|^2\right),$$

skąd po redukcji

$$\|m_j-m_i\|^2 = 2\|m_j-x\|^2+2\|x-m_i\|^2-4\cdot\left\|x-\frac{m_i+m_j}{2}\right\|^2.$$

Ponieważ M jest podprzestrzenią liniową, więc $\frac{1}{2}(m_i+m_j)\in M$ dla każdego i,j, więc $\|x-\frac{1}{2}(m_i+m_j)\|^2\geq d^2$. W konsekwencji,

$$\|m_j-m_i\|^2\leq 2\cdot\|m_j-x\|^2+2\cdot\|x-m_i\|^2-4d^2.$$

Ponieważ $\|x-m_i\|^2\to d^2$ i $\|m_j-x\|^2\to d^2$, gdy $i,j\to\infty$, więc $\|m_j-m_i\|\to 0$, gdy $i,j\to\infty$, czyli $\{m_i\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Skoro M jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni zupełnej, więc istnieje $m_0\in M$ taki, że $m_i\to m_0$, gdy $i\to\infty$. Z ciągłości normy wynika, że $\|x-m_0\|=d$.

Jednoznaczność. Załóżmy, że istnieje $\overline{m_0}\in M$ i $\overline{m_0}\neq m_0$ takie, że $\|x-m_0\|=d$ i $\|x-\overline{m_0}\|=d$. Z reguły równoległoboku

$$\|(x-m_0)+(x-\overline{m_0})\|^2+\|(x-m_0)-(x-\overline{m_0})\|^2 = 2\cdot\|x-m_0\|^2+2\|x-\overline{m_0}\|^2,$$

skąd po prostych przekształceniach

$$\underbrace{\|m_0-\overline{m_0}\|^2}_{>0} = 2\|x-m_0\|^2+2\|x-\overline{m_0}\|^2-\underbrace{4\cdot\|x-\tfrac{1}{2}(m_0+\overline{m_0})\|^2}_{\geq d^2},$$

więc

$$0<\|m_0-\overline{m_0}\|^2\leq 2d^2+2d^2-4d^2=0.$$

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $m_0=\overline{m_0}$, więc $\|x-m_0\|<\|x-m\|$ dla $m\neq m_0$.

Ortogonalność. Jeżeli $m=\Theta\in M$, to oczywiście $\langle x-m_0,\Theta\rangle=0$.
Niech $\|m\|\neq 0$ i $m\in M$. Korzystając z tożsamości

$$\|a-b\|^2=\langle a-b,a-b\rangle=\|a\|^2-2\langle a,b\rangle+\|b\|^2$$

i faktu, że dla dowolnego $\lambda\in\mathbb{R}$, $m_j+\lambda m\in M$, $j=1,2,\ldots$, mamy $\|x-(m_j+\lambda m)\|^2\geq d^2$.
Zatem

$$\|x-(m_j+\lambda m)\|^2=\|(x-m_j)-\lambda m\|^2=$$
$$=\|x-m_j\|^2-2\lambda\langle x-m_j,m\rangle+\lambda^2\|m\|^2\geq d^2.$$

Weźmy $\lambda=\dfrac{\langle x-m_j,m\rangle}{\|m\|^2}$, wtedy

$$\|x-m_j\|^2-2\cdot\frac{|\langle x-m_j,m\rangle|^2}{\|m\|^2}+\frac{|\langle x-m_j,m\rangle|^2}{\|m\|^4}\cdot\|m\|^2=$$
$$=\|x-m_j\|^2-\frac{|\langle x-m_j,m\rangle|^2}{\|m\|^2}\geq d^2.$$

Z ostatniej nierówności wynika oszacowanie:

$$|\langle x-m_j, m\rangle|^2 \leq (\|x-m_j\|^2 - d^2)\cdot\|m\|^2$$

Przechodząc z $j\to\infty$, korzystając z ciągłości iloczynu skalarnego, ciągłości normy, otrzymujemy $\langle x-m_0, m\rangle = 0$ dla dowolnego $m\in M$, $m\neq\Theta$. Łącząc rozważone przypadki ostatecznie mamy, $(x-m_0)\perp M$.

<u>Uwaga</u> Element m_0 występujący w ostatnim twierdzeniu nazywany <u>rzutem ortogonalnym</u> (prostopadłym) elementu x na domknięta podprzestrzeń M.

Powtarzając rozumowanie przedstawione w dwóch pierwszych częściach dowodu mamy następujący rezultat dla zbiorów niepustych, domkniętych i wypukłych.

<u>Twierdzenie</u> Niech M będzie niepustym, domkniętym, wypukłym podzbiorem przestrzeni Hilberta H. Wówczas dla każdego punktu $x\in H$ istnieje dokładnie jeden element $m_0\in M$ najbliższy x, tj. taki że $\|x-m_0\| = \inf_{m\in M}\|x-m\| = d(x,M)$.
(Element m_0 nazywany <u>rzutem</u> wektora x na zbiór M.)
Ponadto wektor $m_0\in M$ jest <u>najbliższy</u> wektorowi $x\in H$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle x-m_0, m-m_0\rangle \leq 0$ dla każdego $m\in M$.

Uzasadnienie tego stwierdzenia wygląda tak:

$\Rightarrow$ Załóżmy, że $m_0\in M$ jest (jedynym) wektorem najbliższym wektorowi x, czyli $\|x-m_0\|^2 \leq \|x-m\|^2$ dla każdego $m\in M$.
Wypukłość zbioru M zapewnia, że wektory $(1-t)m_0 + tm \in M$ dla $0\leq t\leq 1$. Wtedy

$$\|x-m_0\|^2 \leq \|x-[(1-t)m_0+tm]\|^2 =$$
$$= \|x-m_0+t(m_0-m)\|^2 =$$
$$= \|x-m_0\|^2 + 2t\langle x-m_0, m_0-m\rangle + t^2\|m_0-m\|^2,$$

więc

$$0 \leq 2t\langle x-m_0, m_0-m\rangle + t^2\|m_0-m\|^2,$$

skąd

$$\langle x-m_0, m-m_0\rangle \leq \tfrac{1}{2}t\cdot\|m_0-m\|^2.$$

Skoro ta nierówność ma być prawdziwa dla każdego $t\in[0,1]$, to biorąc $t=0$, otrzymujemy

$$\langle x-m_0, m-m_0\rangle \leq 0 \text{ dla każdego } m\in M.$$

$\Leftarrow$ Załóżmy, że $\langle x-m_0, m-m_0\rangle \leq 0$ dla każdego $m\in M$.

wtedy

$$\|x-m\|^2 = \|(x-m_0)-(m-m_0)\|^2 =$$
$$= \|x-m_0\|^2 - 2\langle x-m_0, m-m_0\rangle + \|m-m_0\|^2 \geq \|x-m_0\|^2.$$

Operację wyznaczania rzutu wektora $x \in H$ na niepusty, domknięty, wypukły podzbiór $M \subset H$ nazywamy <u>projekcją</u>. Projekcja $P_M : H \to M$ jest przekształceniem, które każdemu punktowi $x \in H$ przyporządkowuje punkt $m_0 = P_M(x)$.

<u>Twierdzenie</u> Niech M będzie niepustym, domkniętym, wypukłym podzbiorem przestrzeni Hilberta H. Wówczas projekcja P_M spełnia warunek

$$\|P_M(x) - P_M(y)\| \leq \|x-y\| \quad \text{dla wszystkich } x,y \in H.$$

Korzystając z własności iloczynu skalarnego dla projekcji $P_M(x)$ oraz projekcji $P_M(y)$, mamy, odpowiednio nierówności:

$$\left[\langle x-P_M(x), P_M(y)-P_M(x)\rangle \leq 0\right] \Leftrightarrow \left[\langle P_M(x)-P_M(y), x-P_M(x)\rangle \geq 0\right],$$
$$\left[\langle y-P_M(y), P_M(x)-P_M(y)\rangle \leq 0\right] \Leftrightarrow \left[\langle P_M(y)-P_M(x), y-P_M(y)\rangle \geq 0\right].$$

Zatem

$$\|x-y\|^2 = \|(P_M(x)-P_M(y)) + [(x-P_M(x))-(y-P_M(y))]\|^2 =$$
$$= \|P_M(x)-P_M(y)\|^2 + 2\langle P_M(x)-P_M(y), [(x-P_M(x))-(y-P_M(y))]\rangle +$$
$$+ \|(x-P_M(x))-(y-P_M(y))\|^2 \geq$$
$$\geq \|P_M(x)-P_M(y)\|^2 + 2\langle P_M(x)-P_M(y), [(x-P_M(x))-(y-P_M(y))]\rangle =$$
$$= \|P_M(x)-P_M(y)\|^2 + \underbrace{2\langle P_M(x)-P_M(y), x-P_M(x)\rangle}_{\geq 0} + \underbrace{2\langle P_M(x)-P_M(y), y-P_M(y)\rangle}_{\geq 0}$$
$$\geq \|P_M(x)-P_M(y)\|^2$$

skąd ostatecznie, $\|P_M(x)-P_M(y)\| \leq \|x-y\|$ dla $x,y \in H$.

<u>Wniosek</u> W wyżej opisanej sytuacji projekcja $P_M : H \to M$ jest przekształceniem ciągłym.

Geometria przestrzeni unormowanej

W przestrzeni unormowanej $(X, \|\cdot\|)$ zbiór:

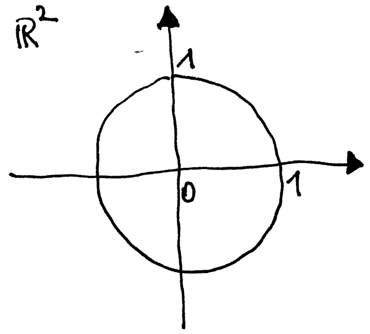
$B(0,1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ nazywamy kulą jednostkową,

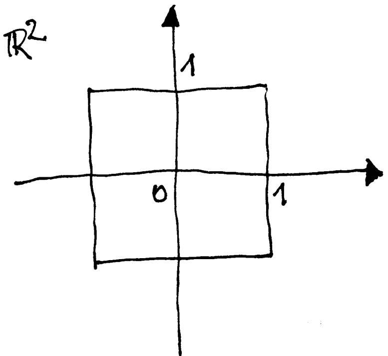
$S(0,1) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ nazywamy sferą jednostkową.

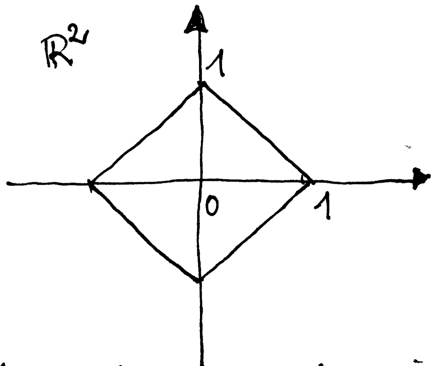
Kształt tych zbiorów zależy od przyjętej normy (!)

Przykład

1) $\mathbb{R}^2$, $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ 2) $\mathbb{R}^2$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$ 3) $\mathbb{R}^2$, $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$







Okazuje się, że kształt jaki przyjmuje kula (sfera) w przestrzeni ma wpływ na własności tej przestrzeni. Wiemy już, że kule w przestrzeniach unormowanych są zbiorami wypukłymi.

Definicja Przestrzeń unormowaną $(X, \|\cdot\|)$ lub normę $\|\cdot\|$ nazywamy ściśle wypukłą, jeśli dla wszystkich $x, y \in X$, z warunków $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $x \neq y$ wynika, że $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$.

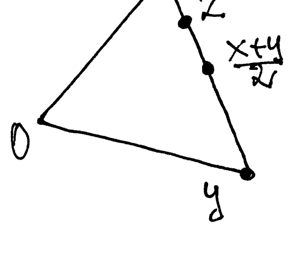
Symbolicznie:

$$(X, \|\cdot\|) \text{ ściśle wypukła } \Leftrightarrow \forall_{x,y \in X} \left((\|x\| = 1, \|y\| = 1, x \neq y) \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 \right)$$

Definicja ta ma prostą interpretację geometryczną: przestrzeń $(X, \|\cdot\|)$ jest ściśle wypukła, gdy sfera jednostkowa nie zawiera odcinka (o różnych końcach).

Istotnie, jeśli sfera zawiera odcinek, to $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $x \neq y$ i $\|\frac{x+y}{2}\| = 1$, a to przeczy ścisłej wypukłości normy, czyli warunkowi $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$.

W drugą stronę, jeśli sfera jednostkowa zawiera punkty x, y takie, że $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $x \neq y$ i $\|\frac{x+y}{2}\| = 1$, to zawiera odcinek $[x, y]$.



Weźmy punkt $z = (1-\alpha)x + \alpha y$ dla $\alpha \neq \frac{1}{2}$ i załóżmy, że $\|z\| < 1$. Istnieje wtedy $\beta \in (0,1)$ takie, że $\frac{x+y}{2} = \beta z + (1-\beta) y$. Wtedy

$$1 = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \|\beta z + (1-\beta) y\| \leq \beta\|z\| + (1-\beta)\|y\| < \beta + 1 - \beta = 1,$$

sprzeczność, więc $\|z\| = 1$. Z dowolności wyboru $z \in [x,y]$ wynika, że odcinek $[x,y]$ leży na sferze jednostkowej.

Takie sytuacje trudno sobie wyobrazić w przestrzeniach wielo-wymiarowych lub o nieskończonym wymiarze.

Przykład

(A) Przestrzenie euklidesowe $\mathbb{R}^n$ z normą $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ spełniają identyczność równoległoboku

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \quad x,y \in \mathbb{R}^n.$$

Załóżmy, że $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ i $x \neq y$. Wtedy

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 4$$

i

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = 1 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 < 1, \text{ bo } \|x-y\| > 0,$$

więc

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Oznacza to, że przestrzenie euklidesowe $\mathbb{R}^n$ są ściśle wypukłe. Powtarzając to rozumowanie widzimy również, że każda przestrzeń Hilberta H (w której norma jest generowana przez iloczyn skalarny) jest ściśle wypukła.

(B) Ściśle wypukłe są przestrzenie ℓ^p, $1 < p < \infty$, ciągów liczb rzeczywistych z normą $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Dla funkcji $f(t) = t^p$, gdzie $t \geq 0$, $1 < p < \infty$, druga pochodna $f''(t) = p(p-1)\cdot t^{p-2} > 0$ dla $t > 0$, więc funkcja f jest ściśle wypukła, tj.

$$f\left(\frac{t+s}{2}\right) < \frac{f(t)+f(s)}{2} \quad \text{dla } t,s \geq 0 \text{ i } t \neq s.$$

Przyjmując $f(t) = \|t\|^p$, mamy dla $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $x \neq y$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p < \frac{1}{2}\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right) = 1$$

skąd

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Dla $1 < p < \infty$ i $p \neq 2$, nie są to przestrzenie unitarne (wykraczają istotnie poza klasę przestrzeni Hilberta).

(C) Przestrzeń ℓ^1 ciągów liczb rzeczywistych $x = (x_1, x_2, \dots)$ takich, że $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$, z normą $\|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$, nie jest przestrzenią ściśle wypukłą. Dla $x = (1,0,0,\dots)$, $y = (0,1,0,\dots) \in S(0,1)$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = \left\|\frac{1}{2}(1,1,0,\dots)\right\| = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

(D) Przestrzeń funkcji ciągłych $C[0,1]$ z normą maksimum $\|f\| = \max_{1\leq t\leq 1} |f(t)|$ też nie jest przestrzenią ściśle wypukłą.

Dla funkcji $f(t) = t$, $g(t) \equiv 1$ dla $0 \leq t \leq 1$, mamy $\|f\| = \|g\| = 1$ i $f \neq g$. Jednocześnie $\left(\frac{f+g}{2}\right)(t) = \frac{t+1}{2}$, gdzie $0\leq t\leq 1$, ma normę $\|\frac{f+g}{2}\| = 1$ (osiąganą dla $t=1$).

W 1936 r. J. Clarkson zaproponował bardziej subtelny sposób mierzenia wypukłości kul. Bierzemy odcinek o długości $0<\varepsilon\leq 2$, przemieszczamy go tak, aby jego końce ślizgały się po sferze i mierzymy w jakiej odległości od sfery leży jego środek. Jeśli dla każdego tak wybranego ε, środek odcinka leży w dodatniej odległości od sfery, to taką przestrzeń unormowaną $(X, \|\cdot\|)$ lub normę $\|\cdot\|$ nazywamy jednostajnie wypukłą.

<u>Definicja</u> Przestrzeń unormowaną $(X,\|\cdot\|)$ lub normę $\|\cdot\|$ nazywamy <u>jednostajnie wypukłą</u>, jeśli dla każdego $\varepsilon\in(0,2]$ istnieje $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ taka, że jeśli $\|x\|=1$, $\|y\|=1$, $\|x-y\|\geq\varepsilon$, to $\|\frac{x+y}{2}\|\leq 1-\delta$.

Warunek jednostajnej wypukłości jest silniejszy niż warunek ścisłej wypukłości, w tym sensie, że każda przestrzeń jednostajnie wypukła jest ściśle wypukła. W przestrzeniach skończonego wymiaru pojęcia te pokrywają się. Dopiero w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych jednostajna wypukłość jest istotnie silniejszym założeniem niż ścisła wypukłość.

<u>Przykład</u> (przestrzeni jednostajnie wypukłej)

(A) Każda przestrzeń Hilberta jest jednostajnie wypukła.

Wobec prawa równoległoboku

$$\|x+y\|^2 = 2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right) - \|x-y\|^2$$

założenia $\|x\|=1$, $\|y\|=1$, $\|x-y\|\geq\varepsilon$, implikują

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = 1-\left(\frac{\|x-y\|}{2}\right)^2 \leq 1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2, \quad \text{skąd}$$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = 1-\underbrace{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\right)}_{=:\ \delta_H(\varepsilon)}.$$

(B) Przestrzenie ℓ^p, $2\leq p<\infty$, są jednostajnie wypukłe.

Pomocniczo wykażemy nierówności: niech $a, b \geq 0$ i $2 \leq p < \infty$. wtedy

$$(*) \qquad a^p + b^p \leq (a^2+b^2)^{\frac{p}{2}};$$

Nierówność jest prawdziwa gdy $a=0$ lub $b=0$. Załóżmy, że $a \cdot b \neq 0$.
Ponieważ $\frac{a^2}{a^2+b^2} \leq 1$ i $\frac{b^2}{a^2+b^2} \leq 1$, więc

$$\frac{a^p}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}} + \frac{b^p}{(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}} = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{p}{2}} + \left(\frac{b^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1,$$

czyli $a^p + b^p \leq (a^2+b^2)^{\frac{p}{2}}$.

$$(**) \qquad (a^2+b^2)^{\frac{p}{2}} \leq 2^{\frac{p-2}{2}} \cdot (a^p + b^p);$$

Dla $p=2$ nierówność jest prawdziwa. Załóżmy, że $p > 2$ i przyjmujmy $p' = \frac{p}{2} > 1$. Wtedy z równości $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$,
$q' = \frac{p'}{p'-1} = \frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{2} - \frac{2}{2}} = \frac{p}{p-2}$, stosując nierówność Höldera, mamy

$$a^2+b^2 = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 1 \leq \left[(a^2)^{p'} + (b^2)^{p'}\right]^{\frac{1}{p'}} \cdot \left[1^{q'} + 1^{q'}\right]^{\frac{1}{q'}} = 2^{\frac{p-2}{p}} \cdot (a^p+b^p)^{\frac{2}{p}},$$

skąd

$$(a^2+b^2)^{\frac{p}{2}} \leq 2^{\frac{p-2}{2}} \cdot (a^p+b^p).$$

$\left\{ \text{Przypomnienie nierówności Höldera:} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\}$

Niech teraz $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots$, $2 \leq p < \infty$. Wtedy z nierówności $(*)$

$$\begin{aligned}
|x_i+y_i|^p + |x_i-y_i|^p &\leq \left(|x_i+y_i|^2 + |x_i-y_i|^2\right)^{\frac{p}{2}} = \\
&= \left(2|x_i|^2 + 2|y_i|^2\right)^{\frac{p}{2}} = \\
&= 2^{\frac{p}{2}} \cdot \left(|x_i|^2 + |y_i|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq \{\text{nierówność } (**)\} \\
&\leq 2^{\frac{p}{2}} \cdot 2^{\frac{p-2}{2}} \cdot \left(|x_i|^p + |y_i|^p\right) = \\
&= 2^{p-1} \cdot \left(|x_i|^p + |y_i|^p\right).
\end{aligned}$$

Sumując te nierówności stronami dla $i = 1, 2, \ldots$, otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i+y_i|^p + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i-y_i|^p \leq 2^{p-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p\right)$$

co implikuje, że dla $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in \ell^p$ $(2 \leq p < \infty)$, mamy

$$\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2^{p-1}\left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)$$

Teraz założenia $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$, $\|x-y\| \geq \varepsilon$, gdzie $0 < \varepsilon \leq 2$, implikują

$$\|x+y\|^p \leq 2^p - \|x-y\|^p \qquad \text{skąd}$$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^p = 1 - \left(\frac{\|x-y\|}{2} \right)^p \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p, \quad \text{czyli}$$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \right]^{\frac{1}{p}} = 1 - \underbrace{\left[1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]}_{\leq \delta_{l^p}(\varepsilon)} .$$

Dla $1 < p < 2$ sytuacja jest bardziej skomplikowana, ale w tym przypadku przestrzenie l^p też są jednostajnie wypukłe.

Liczba "delta" występująca w definicji jednostajnej wypukłości może być rozpatrywana jako funkcja $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ dana wzorem (i zwana modułem wypukłości)

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| = 1, \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \varepsilon \right\}$$

Oczywiście $\delta_X(0) = 0$, $\delta_X(\cdot)$ jest funkcją niemalejącą. Można pokazać, że $\delta_X(\cdot)$ jest funkcją ciągłą na przedziale $[0,2)$.

Przestrzeń unormowana X lub norma $\|\cdot\|$ jest jednostajnie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_X(\varepsilon) > 0$ dla wszystkich $\varepsilon > 0$.

Ponadto dla dowolnej przestrzeni unormowanej X, $x, y, z \in X$, $r > 0$ i $a \in [0, 2r]$ prawdziwa jest następująca implikacja:

$$(\bullet) \qquad \left. \begin{array}{l} \|x - z\| \leq r \\ \|y - z\| \leq r \\ \|x - y\| \geq a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} - z \right\| \leq \left(1 - \delta_X\left(\frac{a}{r}\right) \right) \cdot r .$$

(Jest to przepisanie warunku jednostajnej wypukłości dla dowolnej kuli o środku w punkcie z i promieniu $r > 0$ {w definicji zostało przyjęte $z = \Theta$ i $r = 1$, $a := \varepsilon$}.)

Pokażemy teraz, że w przestrzeniach jednostajnie wypukłych możliwa jest projekcja na punkt najbliższy niepustego, wypukłego i domkniętego podzbioru. Rezultat ten jest rozszerzeniem odpowiedniego wyniku z przestrzeni Hilberta, gdzie wykorzystany był iloczyn skalarny i rzut prostopadły.

W przestrzeniach metrycznych zupełnych prawdziwe jest następujące

Twierdzenie (Cantora)

Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną zupełną, $\{F_i\}$ ciągiem zbiorów niepustych, domkniętych takich, że $X \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ i $\operatorname{diam}(F_i) \to 0$, gdy $i \to \infty$, to iloczyn $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ zawiera dokładnie jeden element (punkt).

Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną, $C \subset X$ będzie zbiorem niepustym, wypukłym i domkniętym. Dla dowolnego $x \in X$ określamy funkcję $\operatorname{dist}(x, C) = \inf\{\|x-y\| : y \in C\}$. Funkcja $\operatorname{dist}(x, C)$ jest ciągła dla dowolnego niepustego zbioru C.

Istotnie, weźmy dowolne $x, y \in X$ oraz $\varepsilon > 0$. Z określenia infimum istnieje takie $z \in C$, że $\|x-z\| < \operatorname{dist}(x,C) + \varepsilon$. Skoro

$$\operatorname{dist}(y, C) \leq \|y-z\| \leq \|y-x\| + \|x-z\| < \|y-x\| + \operatorname{dist}(x,C) + \varepsilon$$

to mamy

$$\operatorname{dist}(y,C) - \operatorname{dist}(x,C) < \|y-x\| + \varepsilon$$

prawdziwe dla każdego $\varepsilon > 0$. Wobec dowolności ε, mamy więc $\operatorname{dist}(y,C) - \operatorname{dist}(x,C) \leq \|y-x\|$. Analogicznie, $\operatorname{dist}(x,C) - \operatorname{dist}(y,C) \leq \|x-y\|$, więc

$$|\operatorname{dist}(x,C) - \operatorname{dist}(y,C)| \leq \|x-y\|,$$ czyli funkcja $\operatorname{dist}(\cdot, C)$ jest ciągła.

Dla punktu $x \in X$ określamy zbiór punktów najbliższych w zbiorze C jako

$$P_C x = \{y \in C : \|x-y\| = \operatorname{dist}(x,C)\}.$$

Niestety nawet w przestrzeniach ściśle wypukłych istnieją przykłady zbiorów niepustych, domkniętych i wypukłych C, w których nie istnieją punkty najbliższe do danego punktu x.

Sytuacja jest odmienna w przestrzeniach jednostajnie wypukłych.

<u>Twierdzenie</u> Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ jest jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha i $C \subset X$ jest niepustym, wypukłym i domkniętym podzbiorem, to dla dowolnego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden punkt $y \in C$ taki, że $\|y-x\| = \operatorname{dist}(x, C)$, czyli $P_C x = \{y\}$.

Dowód. Jeżeli $x \in C$, to $P_C x = \{x\}$. Niech $\operatorname{dist}(x,C) = d > 0$. Dla każdego $\varepsilon > 0$ rozważmy zbiory $D_\varepsilon = \{y \in C : \|x-y\| \leq d + \varepsilon\}$, które są wypukłe i domknięte, a jeśli C nie jest jednoelementowy, to $\operatorname{diam} D_\varepsilon > 0$. Dla dowolnych $u, v \in D_\varepsilon$ takich, że $\|u-v\| \geq \operatorname{diam} D_\varepsilon - \varepsilon$ mamy $\|x-u\| \leq d+\varepsilon$ i $\|x-v\| \leq d+\varepsilon$, więc z jednostajnej wypukłości (•)

$$d \leq \left\|x - \frac{u+v}{2}\right\| \leq \left(1 - \delta_X\left(\frac{\operatorname{diam} D_\varepsilon - \varepsilon}{d+\varepsilon}\right)\right)\cdot(d+\varepsilon).$$

Przechodząc z $\varepsilon \downarrow 0$, otrzymujemy

$$d \leq \left(1 - \delta_X\left(\frac{\operatorname{diam} D_\varepsilon}{d}\right)\right)\cdot d,$$

co jest możliwe tylko wtedy, gdy $\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{diam} D_\varepsilon = 0$.

Ale wtedy, na podstawie twierdzenia Cantora zbiór

$$P_C x = \bigcap_{\varepsilon > 0} D_\varepsilon = \{y\}$$

składa się z dokładnie jednego punktu $y \in C$ takiego, że $\|x-y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.

Punkt y z powyższego twierdzenia nazywamy <u>projekcją metryczną</u> punktu x na punkt najbliższy zbioru C.

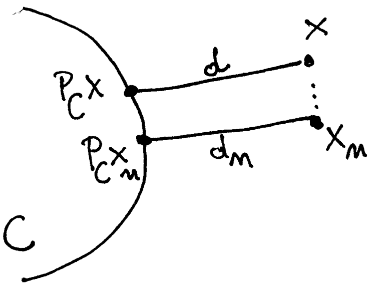
Pokażemy jeszcze, że projekcja metryczna jest przekształceniem ciągłym.

<u>Twierdzenie</u> Jeżeli $(X, \|\cdot\|)$ jest jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha i $C \subset X$ jest niepustym, wypukłym i domkniętym podzbiorem, to wtedy przekształcenie $P_C : X \longrightarrow C$ jest ciągłe. (P_C jest w tym przypadku projekcją metryczną.)

Jeśli przekształcenie P_C nie jest ciągłe, to istnieje punkt $x \in (X \setminus C)$ taki, że $\operatorname{dist}(x, C) = d > 0$ i ciąg $\{x_n\}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \|P_C x_n - P_C x\| = a > 0 .$$

Niech $d_n = \operatorname{dist}(x_n, C)$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} d_n = d$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dostatecznie dużego n, mamy



$$\|x - P_C x_n\| \leq \|x - x_n\| + d_n \leq d + \varepsilon ,$$

$$\|x - P_C x\| = d < d + \varepsilon ,$$

$$\|P_C x_n - P_C x\| > a - \varepsilon .$$

Wtedy jednostajna wypukłość implikuje dla dużych n, patrz (•),

$$d \leq \left\|x - \frac{P_C x_n + P_C x}{2}\right\| \leq \left(1 - \delta_X\left(\frac{a-\varepsilon}{d+\varepsilon}\right)\right) \cdot (d+\varepsilon) ,$$

i przy $\varepsilon \downarrow 0$ mamy sprzeczność

$$d \leq \|\ldots\| \leq \left(1 - \delta_X\left(\frac{a}{d}\right)\right) \cdot d < d ,$$

bo w jednostajnie wypukłych przestrzeniach $\delta_X\left(\frac{a}{d}\right) > 0$. Zatem przekształcenie P_C jest ciągłe.

Przestrzenie unormowane skończonego wymiaru

Przypomnijmy, że przestrzeń unormowana $\mathbb{R}^n$ z normą $\|x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$ (zwana przestrzenią euklidesową) jest przestrzenią zupełną. W uzasadnieniu korzystamy z:
- zupełności przestrzeni $(\mathbb{R},|\cdot|)$;
- nierówności

$$\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2} \le \sqrt{n}\cdot\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i| \qquad (*)$$

Zauważmy, że dla $i=1,2,\dots,n$, mamy nierówności dla liczb rzeczywistych

$$|x_i-y_i|^2 \le \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2 \le n\cdot\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|^2$$

pierwsze jest konsekwencją nieujemności składników sumy, a drugie wynika z określenia funkcji maksimum. Wyciągając z każdej ze stron pierwiastek $\sqrt{\cdot}$, uzyskujemy nierówność $(*)$.

Jeżeli $\{x_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)})\}_{k\ge1}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$, to dla dowolnego $m=1,2,\dots,n$, ciąg m-tych współrzędnych $\{x_m^{(k)}\}_{k\ge1}$ jest ciągiem Cauchy'ego: jeśli $\|x_p-x_q\| = \sum_{i=1}^{n}|x_i^{(p)}-x_i^{(q)}|^2 < \varepsilon^2$ dla wszystkich $p,q>k_0$, to $|x_m^{(p)}-x_m^{(q)}|<\varepsilon$ dla wszystkich $p,q>k_0$, dla dowolnych $m=1,2,\dots,n$. Wtedy z zupełności przestrzeni $(\mathbb{R},|\cdot|)$ wynika, że $x_m^{(k)}\to x_m$, gdy $k\to\infty$, dla $m=1,2,\dots,n$. To zaś, wobec nierówności $(*)$ gwarantuje istnienie elementu $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ takiego, że

$$\|x_k - x\| \to 0, \text{ gdy } k\to\infty.$$

Zatem przestrzeń $(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ jest zupełna.

Uwaga Podobnie pokazujemy zupełność przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z normą $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ dla $1 \leq p < \infty$.

Przestrzeń liniową, której baza ma skończenie wiele elementów nazywamy przestrzenią skończonego wymiaru. Często, gdy baza ma n elementów mówimy, że rozważana przestrzeń jest n-wymiarowa.

W ogólnych przestrzeniach topologicznych X zbiór $A \subset X$ jest zwarty jeśli z każdego pokrycia zbioru A zbiorami otwartymi można wybrać pokrycie skończone.

Przykłady (negatywne)

1) Przestrzeń euklidesowa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ nie jest zwarta. Pokrycie $\{(n, n+2) : n \in \mathbb{Z}\}$ nie zawiera pokrycia skończonego. Pominięcie jednego zbioru (n_0, n_0+2) powoduje, że punkt $n_0+1 \in \mathbb{R}$ i $n_0+1 \notin \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq n_0}} (n, n+2)$.

2) Przedział $(0,1)$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$ nie jest zbiorem zwartym. Otwarte pokrycie $\{(\frac{1}{n}, 1) : n \geq 2\}$ zbioru $(0,1)$ nie zawiera pokrycia skończonego. Dla skończonej ilości przedziałów $(\frac{1}{n_k}, 1)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $n_k \in \mathbb{N}$, gdzie $n_1 < n_2 < \cdots < n_p$, $0 < \frac{1}{n_p} \notin (\frac{1}{n_p}, 1) = \bigcup_{k=1}^{p} (\frac{1}{n_k}, 1)$.

Wskazanie przykładów (nietrywialnych) zbiorów zwartych jest łatwiejsze, gdy znamy kryteria zwartości. Z tym jednak mamy kłopot — znamy mało liczbę kryteriów zwartości i to w skromnej ilości przestrzeni.

W przypadku przestrzeni metrycznych (a więc również w przestrzeniach unormowanych $(X, \|\cdot\|)$) pojęcie zwartości zbioru $A \subset X$ jest łatwiejsze: w przestrzeni metrycznej zbiór $A \subset X$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu $\{x_n\} \subset A$ można wybrać podciąg zbieżny do jakiegoś punktu $x \in A$.

Twierdzenie Zbiór zwarty w przestrzeni topologicznej Hausdorffa jest domknięty.

Istotnie, niech $C \subset X$ będzie zbiorem zwartym i $x \notin C$. Z własności Hausdorffa dla każdego $y \in C$ istnieją otwarte i rozłączne otoczenia punktów x oraz y. Niech $x \in V(y)$, $y \in W(y)$ i $V(y) \cap W(y) = \emptyset$. Rodzina $\{W(y) : y \in C\}$ stanowi pokrycie zbioru zwartego C, więc istnieje skończona liczba punktów $y_1, y_2, \dots, y_n \in C$ taka, że $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} W(y_i) = W$. Wtedy zbiór $V = V(y_1) \cap V(y_2) \cap \dots \cap V(y_n)$ jest otwartym otoczeniem punktu x takim, że $V \cap W = \emptyset$, czyli $V \subset (X \setminus C)$ (bo $C \subset W$). Oznacza to, że $X \setminus C$ jest zbiorem otwartym, a zatem C jest zbiorem domkniętym [dopełnienie zbioru otwartego jest zbiorem domkniętym!].

Twierdzenie Domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zbiorem zwartym.

Niech X będzie przestrzenią zwartą i $A \subset X$ zbiorem domkniętym. Jeśli $\{U_s\}$ jest otwartym pokryciem zbioru A, to rodzina $\{U_s\} \cup (X \setminus A)$ jest otwartym pokryciem przestrzeni X. Skoro ta jest zwarta, to istnieje pokrycie skończone $\{U_1, U_2, \dots, U_p, X \setminus A\}$. Wtedy $A \subset \bigcup_{i=1}^{p} U_i$, więc A jest zbiorem zwartym.

Wiemy, że w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ (w $\mathbb{R}^n$ z jakąkolwiek normą) zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty i ograniczony.

$\Rightarrow$ Domkniętość już mamy. Przypuśćmy, że A nie jest ograniczony tj. $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{x_n \in A} \|x_n\| \geq n$. Z takiego ciągu $\{x_n\}$ nie można wybrać podciągu zbieżnego, bo musiałby być $\|x_{n_k}\| \geq n_k \to \infty$, gdy $k \to \infty$, gdy tymczasem każdy ciąg zbieżny $\{\|x_{n_k}\|\}$ jest ograniczony, tj. $\|x_{n_k}\| \leq C$, dla $k = 1, 2, \dots$, gdzie $C \geq 0$. Sprzeczność.

$\Leftarrow$ Zbiór A jako ograniczony zawiera się w pewnej "kostce" $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, która jako iloczyn kartezjański skończenie wielu zbiorów zwartych jest zbiorem zwartym (tego nie wykazaliśmy). Ponieważ A jest jego domkniętym podzbiorem, więc A jest zbiorem zwartym.

Przykłady (pozytywne)

1) W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ przedział $[0,1]$ jest zbiorem zwartym. Zbiór Cantora $\mathcal{C}$ jako ograniczony i domknięty też jest zbiorem zwartym.

2) Ale uwaga! Charakteryzacja ta nie przenosi się do przestrzeni o nieskończonym wymiarze. W przestrzeni Hilberta $(\ell^2, \|\cdot\|)$ kula jednostkowa $\{x \in \ell^2 : \|x\| \leq 1\}$ jest zbiorem ograniczonym i domkniętym, ale nie jest zbiorem zwartym. Z ciągu $e_1, e_2, \ldots$, gdzie $e_i = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots)$ "jedynka" na i-tym miejscu, a poza tym samo 0, nie można wybrać podciągu zbieżnego, bo $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$, gdy $i \neq j$.

Niech X będzie przestrzenią liniową. Dwie normy w X, $\|\cdot\|$ oraz $\|\cdot\|_1$ nazywamy równoważnymi, jeśli istnieją stałe $a, b > 0$ takie, że

$$a \cdot \|x\| \leq \|x\|_1 \leq b \cdot \|x\| \quad \text{dla każdego } x \in X.$$

Warunkiem równoważnym jest stwierdzenie: ciąg $\{x_n\} \subset X$ jest zbieżny do zera w $(X, \|\cdot\|)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny do zera w $(X, \|\cdot\|_1)$.

Twierdzenie W przestrzeni skończenie wymiarowej dwie normy są równoważne

Dowód Niech X będzie przestrzenią liniową, a elementy $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset X$ niech stanowią bazę. Wtedy każdy element $x \in X$ ma przedstawienie

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Niech w X zadana będzie norma $\|\cdot\|$. Pokażemy, że jest ona równoważna z normą $\|x\|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}$ (to, że jest to norma już było).

Dla dowolnego $x \in X$, mamy

$$\|x\| = \|\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n\| \leq \{\text{nierówność trójkąta}\}$$

$$\leq |\alpha_1|\cdot\|e_1\| + |\alpha_2|\cdot\|e_2\| + \dots + |\alpha_n|\cdot\|e_n\| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\right)\cdot \max_{1\leq i\leq n}\|e_i\| \leq \{\text{z nierówności } (*)\}$$

$$\leq n\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2}\cdot\max_{1\leq i\leq n}\|e_i\| = \left(n\cdot\max_{1\leq i\leq n}\|e_i\|\right)\cdot\|x\|_1 .$$

Stąd wynika między innymi, że $\|\cdot\|$ jest funkcją ciągłą współrzędnych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ punktu x.

Kula $\{x\in X : \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \leq 1\}$ jest zbiorem ograniczonym i domkniętym w przestrzeni skończenie wymiarowej, więc jest w tej przestrzeni zbiorem zwartym. Analogicznie, sfera $S=\{x\in X : \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = 1\}$ jest zbiorem zwartym. Zatem norma $\|\cdot\|$ osiąga na sferze swoje minimum $d>0$. Ponieważ dla każdego $0\neq x\in X$, $\frac{x}{\|x\|_1}\in S$, więc $\left\|\frac{x}{\|x\|_1}\right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1} \geq d$, a stąd $\|x\| \geq d\cdot\|x\|_1$. Dla $x=0$, nierówność $\|x\|\geq d\cdot\|x\|_1$ też jest prawdziwa.

<u>Wniosek</u> Każde dwie normy w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są równoważne.

W 1918 roku F. Riesz podał interesującą charakteryzację skończenie wymiarowych przestrzeni unormowanych.

<u>Lemat</u> Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną, a $Y\subset X$ jej domkniętą podprzestrzenią liniową. Istnieje wtedy $x\in X$ taki, że

$$\|x\| = 1 \quad \text{i} \quad \|x-y\| \geq \tfrac{1}{2} \quad \text{dla każdego } y\in Y.$$

<u>Dowód</u> Weźmy $z\in X\setminus Y$. Wtedy $\inf\{\|z-y\| : y\in Y\} = d>0$, bo inaczej z byłoby granicą ciągu elementów z podprzestrzeni Y, a ponieważ ta podprzestrzeń jest domknięta, to z musiałoby należeć do Y, co jest sprzeczne z wyborem punktu z.
Nie wiemy czy istnieje punkt realizujący infimum, ale istnieje punkt $y_0\in Y$ taki, że $d\leq\|z-y_0\|<2d$.

Niech $x = \frac{z-y_0}{\|z-y_0\|}$, wtedy

$$\|x\| = 1 \quad i \quad \|x-y\| = \left\| \frac{z-y_0 - \|z-y_0\|\cdot y}{\|z-y_0\|} \right\| \geq \frac{1}{2d}\cdot d = \frac{1}{2}$$

gdzie $(y_0 + \|z-y_0\|\cdot y) \in Y$, bo Y jest podprzestrzenią i $y_0, y \in Y$.

Twierdzenie (F. Riesz)

Przestrzeń liniowa X jest skończenie wymiarowa wtedy i tylko wtedy, gdy kula jednostkowa jest zbiorem zwartym.

Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną i $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ kulą jednostkową.

Ponieważ przestrzeń unormowaną n-wymiarową możemy utożsamić z przestrzenią $\mathbb{R}^n$ (utożsamieniem jest przekształcenie: $\mathbb{R}^n \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) \longrightarrow x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \ldots + x_n \cdot e_n \in X$, gdzie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ jest bazą przestrzeni X), więc z wyżej podanych informacji mamy:

$\Leftarrow$ zbiór ograniczony i domknięty w przestrzeni skończenie wymiarowej jest zwarty.

$\Rightarrow$ Pokażemy, że jeśli X jest nieskończenie wymiarowa, to w kuli jednostkowej istnieje ciąg punktów, który nie zawiera podciągu zbieżnego.
Niech $y_1 \in X$ i $\|y_1\| = 1$. $X_1 = \operatorname{span}\{y_1\}$ jest domkniętą liniową podprzestrzenią $X_1 = \{\alpha \cdot y_1 : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Skoro przestrzeń jest nieskończona, to na podstawie Lematu istnieje $y_2 \in X$ taki, że $\|y_2\| = 1$ i $\|y_2 - y_1\| \geq \frac{1}{2}$. Podprzestrzeń $X_2 = \operatorname{span}\{y_1, y_2\}$ jest domknięta i różna od całej przestrzeni, więc na mocy Lematu istnieje $y_3 \in X$ taki, że $\|y_3\| = 1$ i $\|y_i - y_3\| \geq \frac{1}{2}$ dla $i = 1, 2$. Prowadząc to rozumowanie indukcyjnie tworzymy ciąg punktów $\{y_i\} \subset$ kuli taki, że $\|y_m - y_{\bar{m}}\| \geq \frac{1}{2}$ dla $m \neq \bar{m}$. Ten ciąg nie ma podciągu zbieżnego, a to kończy dowód.

Uwaga Przestrzeń Hilberta ℓ^2 ma wymiar nieskończony, bo kula jednostkowa w tej przestrzeni nie jest zbiorem zwartym, ciąg $\{e_i\} \subset \ell^2$ nie zawiera podciągu zbieżnego, $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$, $i \neq j$.

Operacje liniowe

Niech X, Y będą przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem ($\mathbb{R}$). $A: X \to Y$ nazywamy operacją liniową jeśli

1) A jest addytywna, tj. $A(x+y) = A(x) + A(y)$, dla wszystkich $x, y \in X$,

2) A jest jednorodna, tj. $A(\lambda x) = \lambda \cdot A(x)$, dla $x \in X$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

{ Warunki 1) i 2) możemy wyrazić jako:
$$\forall_{x,y \in X} \ \forall_{\alpha,\beta \in \mathbb{R}} \quad A(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot A(x) + \beta \cdot A(y). \}$$

Zamiast określenia "operacja" możemy używać określeń "funkcja", "przekształcenie". Jednak zwyczajowo:

operacja = operator (A) + dziedzina, na której jest określony (X).

Przykłady (operacji liniowych)

1) Niech $X = Y = \mathbb{R}$. $Ax = a \cdot x$, $a \in \mathbb{R}$, jest operacją liniową.
Uwaga Funkcja $f(x) = x+1$, $x \in \mathbb{R}$, nie jest operacją liniową, bo nie jest addytywna: $x+y+1 = f(x+y) \neq f(x) + f(y) = x+y+2$.
Proszę nie mylić "funkcji liniowej" z "operacją liniową".

2) Niech $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ i $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Każde takie przekształcenie jest wyznaczone przez macierz, następująco:
$A = [a_{ki}]_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ k=1,2,\dots,m}}$. Jeśli $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
to $Ax = y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, gdzie $y_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \cdot x_i$,
$k = 1, 2, \dots, m$. Inaczej, $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ określa zależność:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

3) Niech $X = Y = C[a,b]$. Wtedy $A: X \to Y$ dana wzorem
$$(Ax)(t) = \int_a^t x(s)\,ds, \quad t \in [a,b], \ x \in C[a,b]$$
jest operacją liniową.

4) Niech $X = C^1[0,1]$, $Y = C[0,1]$. Wtedy $A: X \to Y$ dana wzorem
$$Af = \frac{d}{dt} f(t) = f'(t) \qquad \{A \text{ jest operatorem różniczkowania}\}$$
jest operacją liniową.

5) Niech $X = Y = C[a,b]$ i określona jest funkcja ciągła $K(s,t) : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$. Wtedy przekształcenie $A : X \to Y$ dane wzorem

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(s,t) \cdot x(t)\, dt$$

jest operacją liniową.

Przestrzeń liniowa, addytywność, jednorodność są pojęciami czysto algebraicznymi. Wzbogacimy je teraz pojęciami z innych dziedzin.

Operacja A jest <u>różnowartościowa</u>, jeśli: $Ax = Ay \Rightarrow x = y$.

<u>Twierdzenie</u> Operacja liniowa A jest różnowartościowa wtedy i tylko wtedy, gdy $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$ dla każdego $x \in X$.

Jeśli A jest operacją liniową, to $A0 = 0$ zawsze, bo
$$A0 = A(0 \cdot x) = 0 \cdot Ax = 0.$$

$\Rightarrow$ Przypuśćmy, że $Ax = 0$. Gdyby $x \neq 0$, to mielibyśmy $A0 = Ax = 0$ i $x \neq 0$, czyli A nie byłaby różnowartościowa.

$\Leftarrow$ Przypuśćmy, że $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$. Gdyby dla pewnych x, y było $x \neq y$ i $Ax = Ay$, to $A(x-y) = 0$, czyli nie byłoby spełnione przypuszczenie $x - y \neq 0$ i $A(x-y) = 0$, tzn. A musi być różnowartościowe.

Weźmy teraz przestrzenie unormowane $(X, \|\cdot\|)$, $(Y, \|\cdot\|)$ (normy choć oznaczamy je takim samym symbolem, mogą być różne!). $A : X \to Y$ operacja liniowa.

$$(A \text{ jest ciągła w } x_0) \Leftrightarrow \forall_{\{x_n\}} \left(\lim x_n = x_0 \Rightarrow \lim Ax_n = Ax_0 \right)$$

$$\Leftrightarrow \forall_{\{x_n\}} \left(\|x_n - x_0\|_X \to 0 \Rightarrow \|Ax_n - Ax_0\|_Y \to 0 \right).$$

<u>Twierdzenie</u> Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. Operacja liniowa $A : X \to Y$ jest ciągła na X wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła przynajmniej w jednym punkcie.

$\Rightarrow$ oczywiste.

$\Leftarrow$ Przypuśćmy, że A jest ciągła w punkcie $x_0 \in X$ i niech $y_0 \in X$ i $y_0 \neq x_0$. Weźmy dowolny ciąg $\{x_n\}$ taki, że $x_n \to y_0$ (tj. $\|x_n - y_0\| \to 0$). Trzeba pokazać, że $Ax_n \to Ay_0$.

Ponieważ $y_n = \underbrace{x_n - y_0}_{\to 0} + x_0 \longrightarrow x_0$, więc z ciągłości operacji A w punkcie x_0: $Ay_n = A(x_n - y_0 + x_0) \longrightarrow Ax_0$, i z liniowości

$$Ay_n = Ax_n - Ay_0 + Ax_0 \longrightarrow Ax_0,$$
$$Ax_n - Ay_0 \longrightarrow 0,$$
$$Ax_n \to Ay_0.$$

<u>Wniosek</u> Operacja liniowa między przestrzeniami unormowanymi $A: X \to Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła w zerze.

<u>Uwaga</u> Dla operacji liniowych zachowanie operacji w jednym punkcie może decydować o zachowaniu globalnym!

Pomimo tego, badanie ciągłości nadal jest trudne. Dla operacji liniowych mamy inny warunek.

Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. <u>Normą operacji</u> $A: X \to Y$ nazywamy nieujemną wartość:

$$\|A\| = \inf\{M \geq 0 : \forall_{x \in X} \ \|Ax\| \leq M \cdot \|x\|\}.$$

<u>Przykład</u> $X = Y = C[a,b]$, $a < b$, i $A: X \to Y$ dana jest wzorem $(Ax)(t) = \int_a^t x(s)\,ds$. Ponieważ

$$|(Ax)(t)| = \left|\int_a^t x(s)\,ds\right| \leq \int_a^t |x(s)|\,ds \leq \int_a^t \max_{a \leq s \leq b} |x(s)|\,ds =$$
$$= \int_a^t \|x\|\,ds = \|x\| \cdot \int_a^t ds \leq \|x\| \cdot (b-a),$$

więc $\|A\| \leq (b-a)$. Z drugiej strony dla $x(t) \equiv 1$, $t \in [a,b]$, $(Ax)(t) = \int_a^t ds = t-a$, czyli $\|x\| = 1$ i $\|Ax\| = (b-a)$. Stąd $\|A\| \geq (b-a)$. W połączeniu z wcześniejszą nierównością, $\|A\| = b-a$.

<u>Twierdzenie</u> Niech X, Y będą przestrzeniami unormowanymi. Operacja liniowa $A: X \to Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $M \geq 0$ taka, że $\forall_{x \in X} \ \|Ax\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$.

$\Leftarrow$ Jeżeli $\|Ax\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X$ dla wszystkich $x \in X$, to dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ takiego, że $\|x_n\|_X \to 0$, mamy:
$0 \leq \|Ax_n\|_Y \leq M \cdot \|x_n\|_X \longrightarrow 0$, czyli $\|Ax_n\|_Y \to 0$.

$\Rightarrow$ Załóżmy, że operacja A jest ciągła w zerze. Wtedy z warunku Cauchy'ego ciągłości:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \left(\|x\|_X < \delta \Rightarrow \|Ax\|_Y < \varepsilon \right),$$

czyli $\sup\{\|Ax\|_Y : \|x\|_X < \delta\} < \varepsilon$ – na kuli o promieniu δ operacja A jest ograniczona przez ε. Zauważmy, że $\|x\|_X \leq 1 \Rightarrow \|\delta x\|_X \leq \delta$, a w takim razie

$$\|x\|_X \leq 1 \Rightarrow \|\delta x\|_X \leq \delta \Rightarrow \|A\delta x\|_Y \leq \varepsilon \Leftrightarrow \delta \|Ax\|_Y \leq \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|Ax\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{\delta} \overset{df}{=} M,$$

czyli liczba $M \geq 0$ jest sensownie określona (na kuli $\|x\| \leq 1$). Weźmy $x \in X$ i $x \neq 0$. Wtedy dla $y = \frac{x}{\|x\|} = \frac{1}{\|x\|} \cdot x$, $\|y\| = \|\frac{1}{\|x\|} \cdot x\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|x\| = 1$, mamy:

$$\|Ay\| = \|A(\frac{1}{\|x\|} \cdot x)\| = \frac{1}{\|x\|} \cdot \|Ax\| \leq M, \text{ skąd}$$

$$\|Ax\| \leq M \cdot \|x\|$$

Dla $x=0$, nierówność jest oczywista.

Ponieważ dla operacji liniowej ciągłej, mamy

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x-y)\| \leq M \cdot \|x-y\|, \quad x,y \in X,$$

więc każda operacja liniowa ciągła spełnia warunek Lipschitza ze stałą $M \geq 0$ (de facto, jest <u>więcej</u> niż ciągła!).

<u>Przykład</u> (operacji liniowej nieciągłej)

Niech $X = C^1[0,1]$, $Y = C[0,1]$ i $A = \frac{d}{dt} : C^1[0,1] \longrightarrow C[0,1]$

W obu przestrzeniach przyjmijmy normę $\|f\| = \max_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$.

Niech $x_n(t) = \sin nt$, $n=1,2,\ldots$, $t \in [0,1]$. Wtedy $\|x_n\| = \max_{0\leq t\leq 1} |\sin nt| = 1$, natomiast $(Ax_n)(t) = x_n'(t) = n \cdot \cos nt$ i

$$\|Ax_n\| = \max_{0\leq t\leq 1} |n \cdot \cos nt| = n, \quad n=1,2,\ldots$$

Zatem $\|A\| = +\infty$, więc A <u>nie</u> jest operacją ciągłą.

Pokażemy teraz

<u>Twierdzenie</u> Każda operacja liniowa określona na skończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej X jest ciągła.

Dowód. Niech $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ będzie bazą przestrzeni X. Jeśli x ma przedstawienie: $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, to $Ax = \alpha_1 Ae_1 + \alpha_2 Ae_2 + \dots + \alpha_n Ae_n$ i

$$\|Ax\| \leq |\alpha_1| \cdot \|Ae_1\| + |\alpha_2| \cdot \|Ae_2\| + \dots + |\alpha_n| \cdot \|Ae_n\| \leq$$
$$\leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|Ae_i\|\right) \cdot \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = \left(\max_i \|Ae_i\|\right) \cdot \|x\|_0 ,$$

gdzie przyjmujemy $\|x\|_0 = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|$. Jeżeli w przestrzeni X dana jest norma $\|\cdot\|$, to $\alpha \|x\|_0 \leq \|x\| \leq \beta \cdot \|x\|_0$ dla $x \in X$, bo w przestrzeni skończenie wymiarowej wszystkie normy są równoważne. Zatem dla dowolnego $x \in X$,

$$\|Ax\| \leq \underbrace{\left(\max_{1 \leq i \leq n} \|Ae_i\|\right) \cdot \frac{1}{\alpha}}_{=M} \cdot \|x\| = M \cdot \|x\| ,$$

co oznacza ciągłość operacji liniowej A.

Uwaga. Jeżeli operacja liniowa jedynie przyjmuje wartości w przestrzeni skończenie wymiarowej, to ten fakt nie gwarantuje ciągłości operacji.

Jeżeli $A : X \to Y$, to zbiór wartości operacji oznaczamy $R(A)$. Na ogół $R(A) \subset Y$ i $R(A) \neq Y$. Jeżeli A jest operacją liniową i różnowartościową, to istnieje operacja odwrotna $A^{-1} : R(A) \to X$. Operacja odwrotna do A, czyli A^{-1} spełnia warunki:

$$\forall_{x \in X} \quad A^{-1}Ax = x , \quad A^{-1}A = Id_X ,$$
$$\forall_{y \in R(A) \subset Y} \quad AA^{-1}y = y , \quad AA^{-1} = Id_{R(A)} .$$

Może się zdarzyć, że istnieje operacja, która spełnia tylko jeden z tych warunków. Mówimy wtedy, że A ma operację lewostronnie odwrotną, bądź prawostronnie odwrotną, odpowiednio.

Stosujemy też terminologię:

(A jest różnowartościowa) $\to$ (A nazywamy odwracalną; A^{-1} jest określone na $R(A)$) ;

(A jest różnowartościowa i "na") $\to$ (A posiada operację odwrotną; A^{-1} jest określona na Y).

Lemat Jeżeli A jest operacją liniową i istnieje A^{-1}, to A^{-1} jest operacją liniową.

Niech $y = A^{-1}(\alpha x_1 + \beta x_2) - \alpha A^{-1}x_1 - \beta A^{-1}x_2$, gdzie $x_1, x_2 \in R(A) \subset Y$.

Wyznaczamy

$$Ay = AA^{-1}(\alpha x_1 + \beta x_2) - \alpha AA^{-1}x_1 - \beta AA^{-1}x_2 =$$
$$= \alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha x_1 - \beta x_2 = 0.$$

Ponieważ A jest operacją różnowartościową (bo wtedy istnieje A^{-1})

$Ay = 0 \Rightarrow y = 0$, więc

$$A^{-1}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A^{-1}x_1 + \beta A^{-1}x_2 \quad \text{dla dowolnych } \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x_1, x_2 \in R(A),$$

a ten warunek gwarantuje liniowość operacji A^{-1}.

O operatorach mówimy, bo wiele zagadnień możemy sprowadzić do pytania o istnienie rozwiązania $Ax = y$ przy ustalonym $y \in Y$. Najprostsza wydaje się sytuacja, gdy $A: X \to Y$ jest operatorem liniowym. Czy równanie $Ax = y$ może:

(1) mieć dokładnie jedno rozwiązanie $x \in X$,
(2) nie mieć w ogóle rozwiązań,
(3) mieć więcej niż jedno rozwiązanie.

Pomocne w rozstrzyganiu tych problemów jest

Twierdzenie (Banacha o operatorze odwrotnym)

Jeżeli $A: X \to Y$ jest operatorem liniowym ciągłym między przestrzeniami Banacha i istnieje operator odwrotny A^{-1}, to A^{-1} jest też operatorem liniowym ciągłym.

Operator liniowy $\varphi: X \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcjonałem liniowym.

Twierdzenie (Hahna-Banacha)

Jeżeli f jest funkcjonałem liniowym ciągłym określonym na podprzestrzeni liniowej L przestrzeni Banacha X, to istnieje jego rozszerzenie F na całą przestrzeń z zachowaniem normy, tj. $f(x) = F(x)$ dla każdego $x \in L$ i $\|f\|_L = \|F\|_X$, gdzie $f: X \supset L \to \mathbb{R}$, a $F: X \to \mathbb{R}$.

Kontrakcje

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Mówimy, że przekształcenie $f : X \to X$ jest zbliżające, gdy istnieje stała $0 \leq M < 1$, że $d(f(x), f(y)) \leq M \cdot d(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in X$. Inaczej są to przekształcenia Lipschitza ze stałą mniejszą od jedynki.

Przykłady

1) W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ przekształcenie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x$ zbliża każdą parę punktów:
$$|f(x) - f(y)| = |\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y| \leq \tfrac{1}{2}|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

2) W przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ przekształcenie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane wzorem $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ nie jest zbliżające. Dla $x = 1$ i $y = 2$ mamy $|g(x) - g(y)| = |\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2| = \{x = 1, y = 2\} = \frac{3}{2} > 1 = |x - y|$.

3) W przestrzeni $X = [0, +\infty)$, z $|\cdot|$, przekształcenie $h(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, w ogóle nie jest lipschitzowskie. Gdyby istniała stała $L \geq 0$ taka, że $|h(x) - h(y)| \leq L \cdot |x - y|$ dla $x, y \geq 0$, to dla $x > 0$ i $y = 0$ byłoby $\sqrt{x} \leq L \cdot x$, czyli $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq L$, a to jest niemożliwe, bo $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Twierdzenie (S. Banach, 1922) Niech $f : X \to X$ będzie przekształceniem zbliżającym zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d). Wtedy istnieje dokładnie jeden punkt $u \in X$ taki, że $f(u) = u$.

(Punkt u nazywamy punktem stałym przekształcenia f.)

Dowód Gdy $u = f(u) \neq f(v) = v$, to
$$0 < d(u, v) = d(f(u), f(v)) \leq M \cdot d(u, v) < d(u, v)$$
i mamy sprzeczność. Zatem jeśli punkt stały istnieje, to dokładnie jeden.

Weźmy dowolne $x_0 \in X$ i utwórzmy ciąg $\{x_n = f(x_{n-1})\}_{n \geq 1}$. Wówczas
$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f^{n+1}(x_0), f^n(x_0)) \leq M \cdot d(f^n(x_0), f^{n-1}(x_0)) \leq \ldots$$
$$\ldots \leq M^n \cdot d(f(x_0), x_0) \longrightarrow 0, \text{ gdy } n \to \infty.$$

Ponieważ

$$d(x_{m+k}, x_m) \leq d(x_{m+k}, x_{m+k+1}) + d(x_{m+k+1}, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_m) \leq$$
$$\leq d(x_{m+k}, x_{m+k+1}) + M \cdot d(x_{m+k}, x_m) + d(x_{m+1}, x_m),$$

więc

$$d(x_{m+k}, x_m) \leq \frac{1}{1-M} \{ d(x_{m+k+1}, x_{m+k}) + d(x_{m+1}, x_m) \} \to 0,$$

gdy $m \to \infty$, co oznacza, że $\{x_m\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. Zatem $x_m \to u \in X$, gdy $m \to \infty$. Warunek $x_m = f(x_{m-1})$, $m \geq 1$, oraz ciągłość przekształcenia f zapewniają, że $u = f(u)$.

Komentarz

1) Twierdzenie Banacha przestaje działać, gdy popsujemy zupełność przestrzeni, np. przestrzeń $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nie jest zupełna w metryce $|\cdot|$. Wtedy przekształcenie $f: X \to X$ dane wzorem $f(x) = \frac{1}{2}x$ jest zbliżające, ale nie ma punktu stałego.

2) Również warunek zbliżania jest istotny. Nie można go zastąpić ogólniejszym warunkiem nieoddalania przyjmując $M = 1$. Wtedy przekształcenie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane wzorem $f(x) = x + 1$ rusza wszystkie punkty z $\mathbb{R}$.
Warunku "$d(f(x), f(y)) \leq M \cdot d(x,y)$", gdzie $M < 1$, nie można też zastąpić warunkiem
"$d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ dla $x \neq y$".
Niech $X = \mathbb{R}$ z naturalną metryką $|\cdot|$ i niech $f(x) = \ln(1+e^x)$.
Ponieważ $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, więc z twierdzenia Lagrange'a

$$|f(x) - f(y)| = \frac{e^\xi}{1+e^\xi} \cdot |x-y| < |x-y| \text{ dla } x \neq y.$$

Jednocześnie przekształcenie f nie ma punktu stałego, bo $f(x) > x$ $[\ln(1+e^x) > \ln(e^x)]$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

3) Oczywiście może się zdarzyć, że przekształcenie ma dokładnie jeden punkt stały i nie jest zbliżające.

Na przykład, dla $X=[0,1]$ z odległością $|\cdot|$ przekształcenie $f(x)=1-x$ ma jeden punkt stały $x=\frac{1}{2}$ i f nie jest zbliżające: $|f(0)-f(1)|=1$ i $|0-1|=1$.

Twierdzenie Banacha ma wiele teoretycznych i praktycznych zastosowań.

Zastosowanie 1 Ciągiem Fibonacciego o generatorach $F_1=F_2=1$ nazywany ciąg $\{F_n\}$, którego kolejne wyrazy spełniają równość $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$, $n>2$. Jego kolejnymi wyrazami są: $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,\ldots$

Pytanie otwarte W ciągu Fibonacciego są liczby pierwsze $2,3,5,13,89,233,\ldots$ (?) Czy w ciągu Fibonacciego liczb pierwszych jest nieskończenie wiele?

Korzystając z twierdzenia Banacha wykażemy, że $\frac{F_n}{F_{n-1}}\longrightarrow \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ (złota proporcja). Wzór ten daje zdumiewająco dobre przybliżenia kolejnych liczb w ciągu Fibonacciego: $F_n\approx \varphi\cdot F_{n-1}$, np. $F_{14}=377$, a $\varphi\cdot F_{13}\approx 377.0019$.

Z warunku $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ dla $n>2$, mamy

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = 1+\frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}},$$

co możemy zapisać w postaci $x_n=f(x_{n-1})=1+\frac{1}{x_{n-1}}$, gdzie $x_n=\frac{F_n}{F_{n-1}}$. Dla funkcji $f:[\frac{3}{2},2]\to[\frac{3}{2},2]$ danej wzorem $f(x)=1+\frac{1}{x}$, mamy

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|xy|}\cdot|x-y| \leq \frac{4}{9}|x-y|, \text{ gdzie } x,y\in[\tfrac{3}{2},2],$$

czyli f jest przekształceniem zbliżającym. Z twierdzenia Banacha ciąg $x_0=\frac{3}{2}$, $x_n=f(x_{n-1})$, $n\geq 1$, jest zbieżny do jedynego punktu stałego, który jest pierwiastkiem równania $x=1+\frac{1}{x}$ w przedziale $[\frac{3}{2},2]$. Tym pierwiastkiem jest liczba $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Stąd, $\frac{F_n}{F_{n-1}}\xrightarrow[n]{}\varphi$.

Poczyńmy teraz nietrywialną obserwację.

Twierdzenie. Niech $f: X \to X$ będzie przekształceniem (może być ono nieciągłe!) zupełnej przestrzeni metrycznej (X, d) takim, że istnieje $N > 1$, że iteracja f^N jest przekształceniem zbliżającym. Wtedy f ma dokładnie jeden punkt stały.

Dowód. Z twierdzenia Banacha istnieje dokładnie jeden punkt $u \in X$ taki, że $f^N(u) = u$. Ponieważ $f^N(f(u)) = f(f^N(u)) = f(u)$, więc musi być $f(u) = u$. Jeżeli dla $y \in X$ mamy $f(y) = y$, to $f^N(y) = f^{N-1}(f(y)) = f^{N-1}(y) = f^{N-2}(f(y)) = f^{N-2}(y) = \dots$ $\dots = y$, i ponownie z jednoznaczności punktu stałego dla przekształcenia f^N, mamy $y = u$.

Przykład

1) Niech $X = C[0,1]$ z normą maksimum. Przekształcenie $T: C[0,1] \to C[0,1]$ dane wzorem $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ nie jest przekształceniem zbliżającym.
Jeżeli T jest zbliżające, to istnieje $0 \le M < 1$ takie, że
$$\|Tf - Tg\| \le M \cdot \|f - g\| \quad \text{dla } f, g \in C[0,1].$$
Niech $f(t) \equiv 1$ i $g(t) \equiv 0$. Wtedy
$$\|Tf - Tg\| = \max_{0 \le x \le 1} \left| \int_0^x dt - \int_0^x 0\,dt \right| = \max_{0 \le x \le 1} |x| = 1,$$
$$\|f - g\| = \max_{0 \le x \le 1} |1 - 0| = 1,$$
a stąd $1 \le M \cdot 1$, co jest sprzeczne z warunkiem $M < 1$.
Zauważmy teraz, że $T^2 f(x) = \int_0^x \left(\int_0^t f(s)\,ds \right) dt$. Wówczas
$$\|T^2 f - T^2 g\| = \max_{0 \le x \le 1} \left| \int_0^x \left(\int_0^t (f(s) - g(s))\,ds \right) dt \right| \le$$
$$\le \max_{0 \le x \le 1} \int_0^x \left(\int_0^t |f(s) - g(s)|\,ds \right) dt \le$$
$$\le \|f - g\| \cdot \max_{0 \le x \le 1} \int_0^x t\,dt =$$
$$= \|f - g\| \cdot \max_{0 \le x \le 1} \left(\tfrac{1}{2} x^2 \right) = \tfrac{1}{2} \|f - g\|,$$
więc T^2 jest przekształceniem zbliżającym.

wyznaczymy teraz punkt stały. Rozważmy $f(t)\equiv 0$, wtedy $Tf=f$. Punkt stały istnieje, pozostaje pokazać, że innych punktów stałych przekształcenie T nie ma.

Załóżmy, że $h\in C[0,1]$ jest innym punktem stałym przekształcenia T, tj. $Th=h$ lub równoważnie $\int_0^x h(t)\,dt = h(x)$

Z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego, zatem $h(x)=h'(x)$. Musimy wyznaczyć wszystkie funkcje spełniające ten warunek (równanie różniczkowe). Rozważmy funkcję $\varphi(x)=h(x)\cdot e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$. Ponieważ $\varphi'(x)=h'(x)\cdot e^{-x}-h(x)\cdot e^{-x}=0$, więc $\varphi(x)=\mathrm{const}$, powiedzmy $\varphi(x)=C$. Stąd $h(x)=C\cdot e^{x}$. Ponieważ $h(0)=0$ $\left[\text{z warunku: } \int_0^x h(t)\,dt = h(x)\right]$, więc $C=0$ i $h(x)\equiv 0\equiv f(x)$. Punkt stały jest jeden.

2) Niech $X=[0,2]$ ze zwykłą metryką $|\cdot|$ i $T: X\to X$ będzie dane wzorem $Tx=\begin{cases}0 & \text{dla } 0\leq x\leq 1\\ 1 & \text{dla } 1<x\leq 2.\end{cases}$ T nie jest przekształceniem zbliżającym, bo $|T(1)-T(2)|=1$ i $|1-2|=1$. Natomiast $T^2(x)\equiv 0$ i jako takie jest przekształceniem zbliżającym.

Zastosowanie 2. Równanie różniczkowe $x'=2\sqrt{|x|}$ z warunkiem początkowym $x(0)=0$ ma nieskończenie wiele rozwiązań, np. $x(t)\equiv 0$, $x(t)=\begin{cases}t^2, & t\geq 0\\ -t^2, & t<0\end{cases}$. To bardzo zła sytuacja, bo my potrzebujemy zapewnienia, że rozwiązanie jest dokładnie jedno. W tej sytuacji dla równań różniczkowych istotne jest

Twierdzenie (R. Lipschitz, 1876)
Niech $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek Lipschitza ze stałą $L>0$ względem drugiej zmiennej, tj. $|f(t,x)-f(t,y)|\leq L\cdot|x-y|$ dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ i $t\in[0,T]$.
Niech $\xi\in\mathbb{R}$ będzie ustalone. Wówczas równanie różniczkowe z warunkiem początkowym:

$$\begin{cases}x'(t)=f(t,x(t)), & t\in[0,T],\\ x(0)=\xi,\end{cases} \iff \begin{cases}F: C[0,T]\to C[0,T],\\ Fx(t)=\xi+\int_0^t f(s,x(s))\,ds,\end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie w przedziale $[0,T]$.

Dowód. W przestrzeni zupełnej $C[0,T]$ z normą maksimum,

$$|Fx(t) - Fy(t)| = \left| \int_0^t f(s,x(s))\,ds - \int_0^t f(s,y(s))\,ds \right| \leq$$
$$\leq \int_0^t |f(s,x(s)) - f(s,y(s))|\,ds \leq$$
$$\leq \int_0^t L\cdot|x(s)-y(s)|\,ds \leq L\cdot\|x-y\|\cdot\int_0^t ds = L\cdot t\cdot\|x-y\|.$$

Biorąc maksimum z obu stron po $t \in [0,T]$, otrzymujemy

$$\|Fx - Fy\| \leq L\cdot T\cdot\|x-y\|, \quad x,y \in C[0,T],$$

więc F jest przekształceniem ciągłym. Ponieważ nie wiemy, czy $L\cdot T < 1$, więc obliczamy

$$|F^2x(t) - F^2y(t)| \leq L\cdot\int_0^t |Fx(s) - Fy(s)|\,ds \leq$$
$$\leq L\cdot\int_0^t L\cdot s\cdot\|x-y\|\,ds = \frac{(L\cdot t)^2}{2}\cdot\|x-y\|,$$

a stąd

$$\|F^2x - F^2y\| \leq \frac{(L\cdot T)^2}{2}\|x-y\|, \quad x,y \in C[0,T].$$

Powtarzając to rozumowanie otrzymujemy kolejne oszacowania:

$$\|F^nx - F^ny\| \leq \frac{(L\cdot T)^n}{n!}\|x-y\|, \quad n=1,2,\dots, \quad x,y \in C[0,T].$$

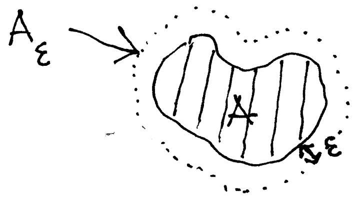
Ponieważ szereg $\sum_n \frac{k^n}{n!}$ jest zbieżny (test d'Alemberta), więc spełniony jest warunek konieczny zbieżności, czyli $\frac{(L\cdot T)^n}{n!} \xrightarrow[n]{} 0$. Istnieje więc $N \in \mathbb{N}$ takie, że $\frac{(L\cdot T)^N}{N!} < 1$, co na podstawie rozszerzenia twierdzenia Banacha zapewnia, że przekształcenie F ma w zbiorze $C[0,T]$ dokładnie jeden punkt stały $Fz = z$, czyli $z'(t) = f(t,z(t))$ i $z(0) = \xi$. Ponadto, $z = \lim_{n\to\infty} F^nx$, gdzie $x \in C[0,T]$ można wybrać dowolnie.

O numerycznej stabilności rezultatu Banacha mówi wynik A. Ostrowskiego z 1967 roku:

Twierdzenie. Niech (X,d) będzie zupełną przestrzenią metryczną i $f: X \to X$ będzie przekształceniem zbliżającym, dla którego $u \in X$ jest punktem stałym. Niech $\{\varepsilon_n\}$ będzie ciągiem dodatnich liczb takim, że $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Wybierając dowolnie $x_0 \in X$, a następnie ciąg $\{x_n\} \subset X$ spełniający warunek $d(x_{n+1}, f(x_n)) \leq \varepsilon_n$ dla $n = 1,2,\dots$, zapewniamy że $\lim_{n\to\infty} x_n = u$.

Fraktale

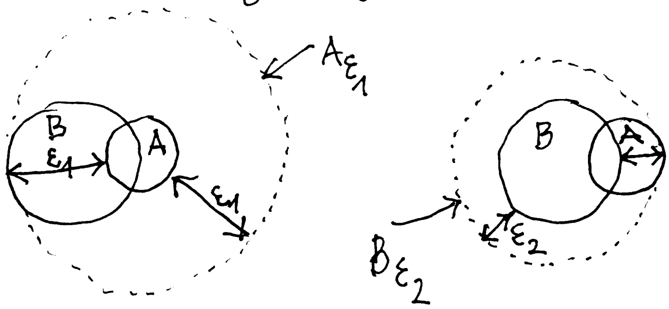
Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Dla ustalenia uwagi możemy myśleć o przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$.
Dla dowolnego zbioru zwartego $A \subset X$ definiujemy ε-otoczenie $(\varepsilon > 0)$ zbioru A: $A_\varepsilon = \{x \in X : |x - y| \leq \varepsilon$ dla pewnego $y \in A\}$



Teraz dla dowolnych dwóch zbiorów zwartych $A, B \subset X$ możemy zdefiniować odległość Hausdorffa między nimi:

$$H(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B_\varepsilon \wedge B \subset A_\varepsilon\}.$$

Jeśli A i B są pojedynczymi punktami, to odległość Hausdorffa między nimi jest po prostu ich zwykłą odległością. Między innymi zbiorami sytuacja się zmienia.



Dla kół A i B na rysunku obok: $H(A,B) = \varepsilon_1$

Oznaczmy przez $\mathrm{Com}(X)$ oznaczmy rodzinę wszystkich niepustych i zwartych podzbiorów przestrzeni X.

Lemat 1 Funkcja $H : \mathrm{Com}(X) \times \mathrm{Com}(X) \longrightarrow [0, \infty)$ jest metryką w przestrzeni $\mathrm{Com}(X)$.

Dowód. Jeżeli $A = B$, to zgodnie z przyjętą definicją $H(A,B) = 0$.
Jeśli $H(A,B) = 0$, to dla każdego $a \in A$ i każdego $b \in B$, $\mathrm{dist}(a, B) = 0 = \mathrm{dist}(b, A)$. Stąd wobec domkniętości zbiorów A i B, $A \subset B \wedge B \subset A$, czyli $A = B$.
Symetria funkcji H jest oczywista.
Jeśli $A, B, C \in \mathrm{Com}(X)$, to $B \subset A_{\varepsilon(H(A,B))}$ oraz $C \subset B_{\varepsilon(H(B,C))} =$

$$= \bigcup_{b \in B} \{\text{Kul o środku w } b \text{ i promieniu } H(B,C)\} \subset$$

$$\subset \bigcup_{a \in A} \{\text{kul o środku w } a \text{ i promieniu } H(A,B) + H(B,C)\}$$

Zatem dla każdego $c \in C$,

$$\mathrm{dist}(c, A) \le H(A,B) + H(B,C).$$

Podobnie, dla każdego $a \in A$,

$$\mathrm{dist}(a, C) \le H(A,B) + H(B,C).$$

Stąd, ponieważ $H(A,C) = \max\left\{ \max_{a \in A} \mathrm{dist}(a,C), \max_{c \in C} \mathrm{dist}(c,A) \right\}$,

więc

$$H(A,C) \le H(A,B) + H(B,C).$$

<u>Lemat 2</u> Jeżeli $\{A_i\}_{i \ge 1}$ jest zstępującym ciągiem elementów przestrzeni $\mathrm{Com}(X)$, to $\bigcap_{i \ge 1} A_i \ne \emptyset$ oraz $\lim_{j \to \infty} H(A_j, \bigcap_{i \ge 1} A_i) = 0$.

<u>Dowód</u> Zbiory $A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ wszystkie zawierają się w zbiorze zwartym A_1. Gdyby przecięcie $\bigcap_{i \ge 1} A_i = \emptyset$, to wybierając ciąg $\{x_n \in A_n\}$ wskazalibyśmy ciąg, który nie ma granicy, więc nie zawiera podciągu zbieżnego, a to przeczy zwartości zbioru A_1. Zatem, $\bigcap_{i \ge 1} A_i \ne \emptyset$.

Jeśli $\lim_{j \to \infty} H(A_j, \bigcap_{i \ge 1} A_i) \ne 0$, to istnieje podciąg $\{A_{i_k}\}_{k \ge 1}$ ciągu $\{A_i\}_{i \ge 1}$ taki, że $A_{i_k} \setminus \left(\bigcap_{i \ge 1} A_i\right)_{\varepsilon(r > 0)} \ne \emptyset$ dla pewnego $r > 0$. Wtedy dla każdego $k \in \mathbb{N}$ w zbiorze A_{i_k} istnieje element x_k taki, że $\mathrm{dist}(x_k, \bigcap_{i \ge 1} A_i) \ge r$.

Ponieważ wszystko dzieje się w zbiorze zwartym, więc istnieje podciąg $x_{k_m} \xrightarrow[m]{} x_0 \in A_1$. Wtedy $\mathrm{dist}(x_0, \bigcap_{i \ge 1} A_i) \ge r$.

Z drugiej strony $x_0 \in \bigcap_{i \ge 1} A_i$, bo $A_{k_m} \subset A_i$ dla $k_m \ge i$.

Z domkniętości zbiorów A_i, $x_0 \in A_i$ dla każdego $i \ge 1$, więc $x_0 \in \bigcap_{i \ge 1} A_i$. Otrzymana sprzeczność kończy uzasadnienie.

<u>Twierdzenie</u> Przestrzeń $(\mathrm{Com}(X), H)$ jest zupełna.

<u>Dowód</u> Niech $\{A_i\}_{i \ge 1}$ będzie ciągiem Cauchy'ego zbiorów zwartych w przestrzeni metrycznej $(\mathrm{Com}(X), H)$. Niech $A = \bigcap_{i \ge 1} \left(\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j \right)$.

Skoro $\{A_i\}_{i \ge 1}$ jest ciągiem Cauchy'ego, to istnieje $K \in \mathbb{N}$, że dla wszystkich $i, j \ge K$, $H(A_i, A_j) \le 1$. Zatem

$$\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j} = \overline{\bigcup_{j=1}^{k} A_j \cup \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j} \subset \overline{\bigcup_{j=1}^{k} A_j \cup (A_k)_{\varepsilon=1}} = \bigcup_{j=1}^{k} A_j \cup \overline{(A_k)}_{\varepsilon=1}$$

Ponieważ $\left\{ \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j} \right\}_{i \geq 1}$ jest zstępującym ciągiem zbiorów niepustych i zwartych, więc A jest zbiorem niepustym i zwartym.

Z lematu 2, $\lim_{i \to \infty} H\left(\overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j}, A \right) = 0$. Wybierzmy $\varepsilon > 0$.

Ponieważ wtedy istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że dla $i \geq k$,

$$A_i \subset \bigcup_{j=i}^{\infty} A_j \subset (A)_\varepsilon \quad \wedge \quad A \subset \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} A_j} \subset (A_i)_\varepsilon \quad \left\{ \begin{matrix} \text{bo } \{A_i\}_{i \geq 1} \\ \text{jest ciągiem} \\ \text{Cauchy'ego} \end{matrix} \right\},$$

więc $H(A, A_i) \leq \varepsilon$, czyli $A_i \xrightarrow[i]{} A$ w przestrzeni $(\mathrm{Com}(X), H)$.

J. Hutchinson w 1981 zdefiniował operator $W(A) = w_1(A) \cup w_2(A)$, gdzie przekształcenia $w_i : X \to X$, $i = 1, 2$, są przekształceniami zbliżającymi, ze współczynnikami zbliżania $k_1, k_2 < 1$. Następnie Hutchinson zauważył (i pokazał), że przekształcenie W jest również przekształceniem zbliżającym, ale względem metryki Hausdorffa!

Oznacza to (analogicznie jak w twierdzeniu Banacha), że od jakiego byśmy obrazu A_0 nie wystartowali, to otrzymany ciąg obrazów $A_{n+1} = W(A_n)$, $n \geq 0$, który w metryce Hausdorff będzie dążył do pewnego obrazu A_∞, dla którego $W(A_\infty) = A_\infty$. Zbiór A_∞ nazywamy atraktorem dla iteracji operatora W, jest on zbiorem niezmienniczym dla operatora W.

Rozpatrzmy dwa przekształcenia zbliżające $w_1, w_2 : X \to X$ o współczynnikach zbliżania $k_1, k_2 < 1$, odpowiednio. Weźmy dwa niepuste zbiory $A, B \in \mathrm{Com}(X)$. Pokażemy, że dla zbiorów $W(A) = w_1(A) \cup w_2(A)$, $W(B) = w_1(B) \cup w_2(B)$ mamy: odległość Hausdorffa $H(W(A), W(B))$ jest ściśle mniejsza od odległości $H(A, B)$.

Niech odległość między zbiorami A i B będzie $\varepsilon > 0$, czyli $H(A, B) = \varepsilon$. Wtedy $B \subset A_\varepsilon$. Po zastosowaniu przekształceń

w_1 oraz w_2, otrzymujemy
$$w_1(B) \subset w_1(A_\varepsilon) \quad i \quad w_2(B) \subset w_2(A_\varepsilon).$$
Z własności zbliżania dla tych dwóch przekształceń wynika, że
$$w_1(A_\varepsilon) \subset [w_1(A)]_{k_1 \cdot \varepsilon} \quad i \quad w_2(A_\varepsilon) \subset [w_2(A)]_{k_2 \varepsilon}.$$
Oznacza to, że zbiór $w_1(B) \cup w_2(B)$ jest zawarty w $(\max\{k_1,k_2\} \cdot \varepsilon)$ – otoczeniu zbioru $w_1(A) \cup w_2(A)$, tj.
$$w_1(B) \cup w_2(B) \subset [w_1(A) \cup w_2(A)]_{\max\{k_1,k_2\} \cdot \varepsilon}.$$
Podobnie otrzymujemy
$$w_1(A) \cup w_2(A) \subset [w_1(B) \cup w_2(B)]_{\max\{k_1,k_2\} \cdot \varepsilon}.$$
Wynika stąd, że $H(W(A), W(B)) \leq \max\{k_1,k_2\} \cdot H(A,B)$, czyli przekształcenie mniej pomniejszające określa współczynnik zbliżania.

Mamy więc rezultat

Twierdzenie (J. Hutchinson, 1981) Niech dane będą odwzorowania zbliżające $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ na przestrzeni X ze współczynnikami zbliżania $k_i < 1$, odpowiednio. Istnieje wtedy dokładnie jeden niepusty zbiór zwarty $E \in Com(X)$ taki, że $E = W(E) = \bigcup_{i=1}^{m} w_i(E)$. Ponadto, jeżeli F jest dowolnym elementem przestrzeni $Com(X)$, to iteracje $W^k(F)$ są zbieżne do zbioru E w metryce Hausdorffa, gdy $k \to \infty$.

Jeśli X jest przestrzenią euklidesową $\mathbb{R}^n$, zaś w_i są geometrycznymi podobieństwami o skalach $k_1, k_2, \dots, k_m < 1$ to zbiór spełniający warunek $E = W(E)$ [z poprzedniego twierdzenia] nazywamy samopodobnym względem $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$. Zbiory te nazywane są też fraktalami i mogą one być bardzo "egzotyczne". Uwagę na zjawisko samopodobieństwa (w przyrodzie i otaczającej nas przestrzeni) zwrócił B. Mandelbrot w latach 70. XX wieku.

Przykłady

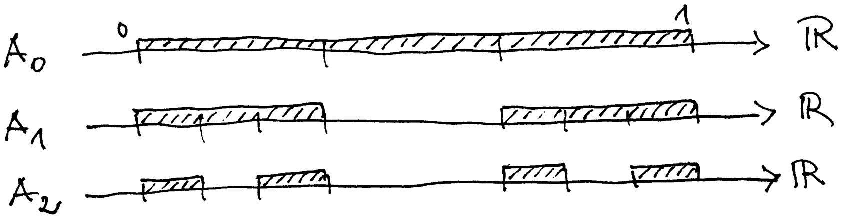
1. Zbiór Cantora. Rozważmy prostą euklidesową $\mathbb{R}$ i dwa

przekształcenia (podobieństwa) $w_1(x) = \frac{1}{3}x$, $w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.
Dla obu tych przekształceń współczynnik zbliżania jest równy $k = \frac{1}{3}$.
Przekształcenie W określone jest przez przyporządkowanie każdemu zwartemu zbiorowi $A \subset \mathbb{R}$ zbioru

$$W(A) = \tfrac{1}{3}A \cup \left(\tfrac{1}{3}A + \tfrac{2}{3}\right),$$

jest to przekształcenie zbliżające względem metryki Hausdorffa o współczynniku zbliżania $k = \frac{1}{3}$.
Jeżeli przyjmiemy $A_0 = [0,1]$, to

$$A_1 = [0,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},1],$$
$$A_2 = [0,\tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}] \cup [\tfrac{6}{9},\tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9},1], \text{ itd}$$



$\vdots$

Ciąg zbiorów $\{A_{n+1} = W(A_n) = W^{n+1}(A_0)\}_{n \geq 0}$ jest zbieżny w metryce Hausdorffa H do zbioru Cantora $A_\infty = \mathcal{C}$.

2. Trójkąt Sierpińskiego. Niech $X = \mathbb{R}^2$, na którą popatrzymy jak na płaszczyznę zespoloną, której punkty zapisujemy jako $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Rozważmy przekształcenie W określone przez układ trzech odwzorowań

$$w_1(z) = \tfrac{1}{2}z,$$
$$w_2(z) = \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2},$$
$$w_3(z) = \tfrac{1}{2}z + \frac{1+i\sqrt{3}}{4}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Przekształcenie W określamy przez przyporządkowanie każdemu zwartemu zbiorowi $A \subset \mathbb{R}^2$ zbioru

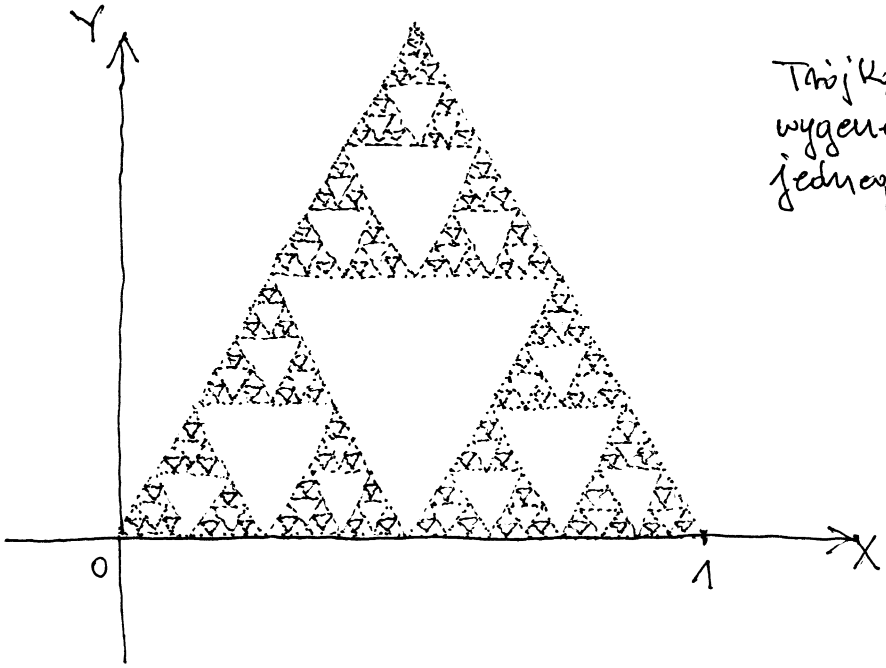
$$W(A) = w_1(A) \cup w_2(A) \cup w_3(A).$$

Jest to przekształcenie zbliżające względem metryki Hausdorffa o współczynniku zbliżania $k = \frac{1}{2}$.
Jeżeli przyjmiemy, że A_0 jest jednym punktem, np. początkiem układu współrzędnych, $z = 0 + i0$, to A_1 składa się

z trzech punktów, A_2 z dziewięciu, A_3 z dwudziestu siedmiu, itd.

$$A_0 = \{(0,0)\},$$
$$A_1 = \left\{ \{(0,0)\}, \{(\tfrac{1}{2},0)\}, \{(\tfrac{1}{4},\tfrac{\sqrt{3}}{4})\} \right\}, \text{ itd.}$$
$$\vdots$$
A_n składa się z 3^n punktów płaszczyzny.

Granicą A_∞ jest równoboczny trójkąt Sierpińskiego, którego podstawą jest odcinek $[0,1]$.



Trójkąt Sierpińskiego wygenerowany z jednego punktu $(0,0)$.

Problematyka ta znajduje zastosowanie w kodowaniu informacji oraz technice generowania realistycznych obrazów z małego zbioru wyjściowych informacji

THE END